

Universidad EAFIT
Departamento de Ciencias Básicas

Problemas de Frontera para la Ecuación de Helmholtz

Trabajo de investigación presentado como requisito parcial para optar el
título de Magíster en Matemáticas Aplicadas

Luis Eduardo Torres García

Jorge Enrique Triviño Macías

Director

Jairo Villegas Gutiérrez

Departamento de Ciencias Básicas

Universidad EAFIT

Medellín

Agradecimientos

Al profesor Jairo Villegas Gutiérrez quien con dedicación y sabiduría nos orientó para poder culminar con éxito nuestro trabajo de tesis.

A la Universidad Eafit y a la Universidad de la Amazonia por facilitarnos los espacios académicos e institucionales y por garantizarnos el apoyo económico y logístico necesario para la realización de todos los estudios de Maestría.

Al doctor Mauricio Vélez Upegui rector de la Universidad Eafit (2004), al doctor Óscar Villanueva Rojas rector de la Universidad de la Amazonia, a la doctora María Eugenia Puerta Yepes y al doctor Daniel Velásquez P directores del Departamento de Ciencias Básicas, así como al doctor Gerardo Arango Ospina presidente de la ERM, por la decisión política y la gestión académica y administrativa que realizaron para permitirnos acceder a este proceso de formación de postgrado tan significativo para la cualificación de nuestra labor docente universitaria.

Al excelente equipo de profesores de la Maestría en Matemáticas Aplicadas quienes con sus profundos conocimientos disciplinares y con gran compromiso y responsabilidad nos orientaron en el aprendizaje de la Matemática, particularmente al doctor Mauro Montealegre quien aportó en la gestión del convenio entre las dos Universidades porque siempre creyó en la capacidad de las instituciones y de nosotros como estudiantes potenciales.

Dedicatoria

A nuestras esposas

Nancy y Yolanda

A nuestros hijos:

Lina Marcela, Nancy Liliana, Luis Eduardo, Juan Andrés, Alejandro e
Iveth Natalia.

Maira Alejandra, Paula Fernanda y Laura Sofía.

Índice general

Introducción	1
1. Preliminares	3
1.1. Conceptos de análisis funcional	3
1.1.1. Operadores lineales	4
1.1.2. Funcionales y operadores adjuntos	6
1.1.3. Distribuciones	8
1.1.4. Espacios de Sobolev	12
1.2. Transformada de Fourier	16
1.2.1. Serie de Fourier	17
2. La ecuación de Helmholtz	21
2.1. Solución a la ecuación de Helmholtz	21
2.1.1. Construcción de la función de Green	23
2.1.2. Función de Green como solución de la ecuación de Helmholtz	27
2.1.3. La condición de radiación de Sommerfeld	30
2.1.4. El método de la ecuación integral	33
2.1.5. Problema modelo	37
2.2. Métodos de aproximación	40
2.2.1. La aproximación WKB	40
2.2.2. La aproximación de Rytov	42
2.2.3. Solución en serie de Born	44
2.2.4. Método de perturbación regular	47

3. Formulación variacional para la ecuación de Helmholtz	51
3.1. Extensión a soluciones débiles	51
3.2. La formulación variacional	55
3.3. El método de Galerkin	63
Bibliografía	69

Introducción

En radiofísica contemporánea, óptica atmosférica, comunicación inalámbrica y, en general, teoría de comunicación, el estudio de propagación de ondas electromagnéticas en la atmósfera se ha incrementado en las últimas décadas considerablemente, esto a raíz de las nuevas tecnologías computacionales y los modernos laboratorios que nos permiten analizar y experimentar el comportamiento turbulento que se presenta en la atmósfera. Como consecuencia de este desarrollo, herramientas matemáticas más sofisticadas se deben introducir en el estudio y tratamiento de estos fenómenos, tales como ecuaciones en derivadas parciales, teoría de distribuciones, desigualdades variacionales, funciones de Green y métodos de aproximación y numéricos, sin los cuales sería imposible resolver las ecuaciones que modelan dichos fenómenos físicos. Más concretamente, los fenómenos mencionados se modelan por medio de la ecuación

$$(\Delta + k^2)u = 0, \quad (*)$$

la ecuación (*) se llama ecuación de Helmholtz, en honor al físico Alemán Herman Ludwing Ferdinand von Helmholtz por su trabajo pionero en la teoría matemática de la acústica y electromagnetismo. El operador Δ denota el Laplaciano

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

El parámetro $k \in \mathbb{C}$ se llama el número onda y está asociado a la frecuencia λ de la onda subyacente y está dado por $\lambda = 2\pi/k$. El signo de k se escoge de tal manera que $\text{Im } k \geq 0$, pero nosotros estaremos interesados en el caso real que modela ondas progresivas, mientras si la parte imaginaria de k es no nula, se presentan ondas atenuadas.

2 Introducción

Varios son los problemas estudiados a través de esta ecuación, como por ejemplo, el análisis de dispersión de ondas acústicas por un obstáculo en tiempo armónico, en el estudio de las ecuaciones de Maxwell y la dispersión de ondas electromagnéticas. En el caso de dominios suaves, ese tipo de problema se ha estudiado usando métodos clásicos de capas de potenciales, se procura aquí dar una descripción de este método en problemas de frontera para la ecuación de Helmholtz en dominios suaves. Comenzaremos este trabajo resolviendo la ecuación (*) a través de funciones de Green. Luego haremos un corto estudio sobre índice de refracción y algunos conceptos básicos de óptica. Para resolver los problemas de frontera, Dirichlet o Neumann de la ecuación (*), estudiaremos la formulación variacional de esta ecuación y la utilizaremos para resolverla por el método de Galerkin.

El trabajo consta de tres capítulos cuyo contenido pasamos a comentar. El primer capítulo es muy breve y en él fijamos la nomenclatura empleada en la memoria y recogemos algunos conceptos y propiedades básicas del análisis funcional que permita el estudio de la ecuación de Helmholtz con condiciones de frontera de Dirichlet y Neumann en diferentes dominios. En el segundo capítulo se estudia los diferentes métodos para resolver la ecuación de Helmholtz, acá incluimos técnicas de aproximación, funciones de Green y el método de la ecuación integral. En el tercer capítulo se hace una introducción a la formulación variacional de la ecuación de Helmholtz y se desarrolla de forma breve el método de Galerkin y luego se aplica en un problema de frontera para la ecuación de Helmholtz en \mathbb{R} .

Para un estudio profundo del método de elementos finitos y otras técnicas para resolver la ecuación de Helmholtz en diferentes dominios, véase [1], [3], [6], [7], [8], [12], [15], [17], [18], [19], [26] y [27]. No sobra decir que futuros trabajos se pueden continuar de éste, utilizando por ejemplo, los artículos de Duran [15] y Erlangga [18], [19], sólo por mencionar algunos de tantos estudiosos del tema.

CAPÍTULO 1

Preliminares

1.1. Conceptos de análisis funcional

En este capítulo se presentará alguna terminología necesaria para la lectura de esta monografía. En particular, se hará un resumen de resultados básicos de análisis tales como la transformada de Fourier, nociones sobre operadores lineales, funciones generalizadas y espacios de Sobolev, sólo por mencionar algunos temas. Las pruebas de estos temas serán omitidas, pero se pueden encontrar en algunos de los siguientes textos [21], [25], [31], [34], [36], [42], [43].

Recuerde que $L_1(\mathbb{R})$ es el espacio de todas las funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, tal que $\int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt = \|f\|_{L_1} < \infty$. De igual forma se tiene $L_2(\mathbb{R})$, el espacio de las funciones cuadrado-integrables, cuya norma es

$$\|f\|_{L_2} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} < \infty.$$

Este espacio se dota con el producto escalar

$$\langle f, g \rangle_{L_2} = \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{g(t)} dt,$$

donde $\overline{g(t)}$ denota el conjugado complejo de $g(t)$. Con este producto interno el espacio $L_2(\mathbb{R})$ es de Hilbert. Las funciones $f, g \in L_2(\mathbb{R})$ son ortogonales si $\langle f, g \rangle_{L_2} = 0$. En general, $L_p(\mathbb{R})$ ($p \geq 1$), es el espacio de todas las funciones

4 Preliminares

(clases de equivalencia) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, tal que $\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p dt = \|f\|_{L_p}^p < \infty$, o de manera equivalente

$$\|f\|_{L_p} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p dt \right)^{1/p}$$

es la norma de f en $L_p(\mathbb{R})$. El espacio de las funciones localmente integrables, $L_{loc}^1(\Omega)$ se define por

$$L_{loc}^1(\Omega) := \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : u \in L_1(K), \forall K \text{ compacto de } \Omega\}.$$

1.1.1. Operadores lineales

Sea $F = \mathbb{C}$ o \mathbb{R} , X y Y espacios normados. Un operador lineal es una función $T : X \rightarrow Y$ tal que $T(au + bv) = aT(u) + bT(v)$, para cada $a, b \in F$ y cada $u, v \in X$. El operador T es continuo en u_0 si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si

$$\|u - u_0\|_X < \delta \quad \text{entonces} \quad \|Tu - Tu_0\|_Y < \epsilon. \quad (1.1.1)$$

Si (1.1.1) se cumple para cada $u_0 \in X$ se dice que T es continuo en X . Si δ no depende del punto u_0 se dice que T es uniformemente continuo en X .

El operador T es acotado si y sólo si existe una constante $c > 0$ tal que $\|Tu\|_Y \leq c\|u\|_X$ para cada $u \in X$.

Proposición 1.1.1. *El operador $T : X \rightarrow Y$ es continuo si y sólo si T es acotado.*

Demostración. Ver por ejemplo, [31, Th 2.7-9, p. 97]. □

Sean X y Y espacios normados y $K : X \rightarrow Y$ un operador lineal, K es compacto si el conjunto $\{Ku : \|u\|_X \leq 1\}$ tiene clausura compacta en Y . Claramente, todo operador acotado de rango finito ($\mathcal{R}(K)$ es finito dimensional) es compacto.

$\mathcal{L}(X, Y)$ denota el conjunto de todos los operadores lineales y continuos (o acotados) de X en Y . $\mathcal{L}(X, Y)$ es un espacio normado, donde la norma se define por

$$\|T\| = \sup_{u \neq 0} \frac{\|Tu\|_Y}{\|u\|_X} = \sup_{\|u\|=1} \|Tu\|,$$

para cada $u \in X$, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. En donde $aT + bS$ se define por

$$(aT + bS)u = aTu + bSu,$$

para cada $T, S \in \mathcal{L}(X, Y)$, $u \in X$ y cada $a, b \in F$.

Si $Y = F$ entonces $\mathcal{L}(X, F)$ se llama el dual topológico de X y se denota por X' , es decir, $X' = \mathcal{L}(X, F)$ sus elementos se llaman funcionales lineales continuos o formas lineales continuas sobre X . En consecuencia, $f \in X' \Leftrightarrow f : X \rightarrow F$ es una aplicación lineal y continua, es decir,

$$\|f(u)\| = |f(u)| \leq c\|u\|_X,$$

para cada $u \in X$ y $c > 0$. Es costumbre escribir $\langle f, u \rangle$ (o $\langle u, f \rangle$) en lugar de $f(u)$.

$$\|f\|_{X'} = \sup_{u \neq 0} \frac{|\langle f, u \rangle|}{\|u\|_X}.$$

Ejemplo 1.1.1. Sea $X = C[a, b]$,

$$f : X \rightarrow \mathbb{R} : \varphi \mapsto \langle f, \varphi \rangle = \int_a^b g(x)\varphi(x)dx$$

para cada $g \in L_1([a, b])$, entonces $\langle f, \varphi \rangle$ define un funcional lineal y continuo sobre X . En efecto,

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq \int_a^b |g(x)||\varphi(x)|dx \leq \max_{a \leq x \leq b} |\varphi(x)| \int_a^b |g(x)|dx = c\|\varphi\|_\infty.$$

No todos los funcionales lineales y continuos son de la forma

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_a^b g(x)\varphi(x)dx.$$

Por ejemplo, la “función” δ de Dirac definida en \mathbb{R} con las siguientes propiedades:

1. $\delta(x) = 0$ para $x \neq 0$.
2. $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$.
3. Para cada $\varphi \in C(\mathbb{R})$ se tiene $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x)dx = \varphi(0)$.

Desde el punto de vista del “rigor” matemático esto carece de sentido. No es posible construir una función en el sentido ordinario que tenga esas propiedades. Sin embargo, Dirac observó que δ actuaba como un operador en las funciones continuas φ . Es decir, δ se puede definir de manera apropiada como un funcional lineal y continuo en el espacio de las funciones continuas $C(a, b)$ ($a < 0 < b$), esto es,

$$\delta : C(a, b) \rightarrow \mathbb{R} : \varphi \mapsto \langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0).$$

Por tanto, δ actúa sobre funciones continuas de tal manera que produce un valor de la función en cero. El acotamiento de δ es inmediato,

$$|\langle \delta, \varphi \rangle| = |\varphi(0)| \leq \sup_{a < x < b} |\varphi(x)| = \|\varphi\|_\infty.$$

1.1.2. Funcionales y operadores adjuntos

En la formulación variacional de un problema de frontera se presenta ecuaciones de la forma

$$Au = f \quad \text{en } \Omega \quad (1.1.2)$$

donde $A : U \rightarrow V$ es un operador que puede ser lineal o no, U y V son espacios con producto interno, en general, son espacios de Hilbert. La ecuación (1.1.2) es una forma abstracta de ecuaciones que aparecen en ciencias e ingeniería. Por ejemplo, considere la ecuación de Poisson en \mathbb{R}^2

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{en } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{en } \Gamma \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es un plano y Γ es la frontera de Ω . La ecuación (1.1.3) junto con la condición de frontera se llama un problema de Dirichlet para la ecuación de Poisson. Por ahora, suponemos que $f \in C(\overline{\Omega})$, donde $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$.

Por *solución clásica* del problema (1.1.3) se entiende una función u continua en el dominio cerrado $\overline{\Omega}$, que satisface la ecuación en el dominio abierto Ω y es igual a cero en la frontera Γ . Como se supuso $f \in C(\overline{\Omega})$, la solución u está en $C^2(\overline{\Omega})$. El conjunto de todas las funciones admisibles, $D(A)$, está dado por

$$D(A) = \{u(\mathbf{x}) \in C^2(\overline{\Omega}), \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, u = 0 \text{ en } \Gamma\}$$

y es un espacio vectorial. Nótese que si condición de frontera no es homogénea, digamos, $u = h$ en Γ , entonces $D(A)$ no es un espacio vectorial. El espacio $D(A)$ se llama el dominio de definición del operador A . El operador $A = -\Delta$ asigna toda función $u \in D(A)$ una función $v = -\Delta u$ continua en Ω . El conjunto de todas las funciones $v = -\Delta u$ también es un espacio vectorial, se llama el rango o recorrido de A , y se denota por $\mathcal{R}(A)$.

Como un funcional lineal es una clase especial de operador lineal, el concepto de continuidad para funcionales lineales es el mismo que para operadores lineales. En espacios normados, los conceptos de continuidad y acotamiento son equivalentes para funcionales lineales. En espacios de Hilbert, los funcionales lineales acotados tienen representaciones simples. Considere un espacio con producto interno V y sea v_0 un elemento fijo en V . El operador ℓ definido por

$$\ell(u) = (v_0, u), \quad \forall u \in V$$

es un funcional lineal. En efecto,

$$\begin{aligned} \ell(\alpha u + \beta v) &= (v_0, \alpha u + \beta v) \\ &= \alpha(v_0, u) + \beta(v_0, v) \\ &= \alpha\ell(u) + \beta\ell(v). \end{aligned}$$

Además, por desigualdad de Schwarz se tiene

$$\ell(u) = |(v_0, u)| \leq \|v_0\| \|u\| = M \|u\|$$

donde $M = \|v_0\|$. Por tanto, ℓ es acotado. Note que $\|\ell\| \leq \|v_0\|$. Por otro lado, $|\ell(v_0)| = \|v_0\|$ o $\|\ell\| \geq \|v_0\|$. Luego la norma del operador ℓ esta dada por $\|\ell\| = \|v_0\|$. De lo anterior, observe que podemos asociar un funcional lineal acotado con cada elemento de un espacio con producto interno. Sin embargo, el recíproco no es cierto en general. El teorema de representación de Riesz, establece que el recíproco es cierto en espacios de Hilbert.

Teorema 1.1.2. (Teorema de representación de Riesz) *Sea ℓ un funcional lineal acotado en un espacio de Hilbert H . Entonces existe un único vector v_0 en H tal que*

$$\ell(w) = (v_0, w), \quad \forall w \in H.$$

Demostración. Ver por ejemplo, [42] o [43]. □

El vector $v_0 \in H$ se llama la representación de ℓ .

La colección de todos los funcionales lineales ℓ definidos sobre un espacio normado V , forma un espacio de Banach, V' , que se llama el dual del espacio V . Por ejemplo, el espacio $L_p(\Omega)$ de las funciones (clases) p -integrables definidas sobre el dominio acotado Ω es el dual de $L_q(\Omega)$ para $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Consideremos ahora el operador lineal acotado $T : U \rightarrow V$, con U y V espacios normados. Sea $h(v)$ el funcional lineal definido en V , entonces $h(v)$ es definido para $v = Tu$, $u \in U$. Luego tenemos,

$$h(v) = h(Tu) \equiv \ell(u)$$

donde $\ell(u)$ es un funcional definido en U . Es claro que $\ell(u)$ es lineal. Por tanto, el funcional $\ell \in U'$ corresponde a todo $h \in V'$. La colección de todas las correspondencias así construidas forma un operador T' con dominio V' y rango contenido en U' . Este operador T' se llama el adjunto de T . La igualdad $h(v) = \ell(u)$ se expresa como $\ell = T'h$.

La expresión $\ell(u) = \langle f, u \rangle$ es un funcional bilineal de las dos variables $u \in U$ y $f \in U'$. Cuando U es un espacio de Hilbert, se tiene $U = U'$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interno, mientras si $U \neq U'$ y $f \in U'$ la expresión $\langle f, u \rangle$ se llama el par dual. Si $T : H \rightarrow H$ es un operador acotado y H es un espacio de Hilbert, entonces fijando v en H , el producto interno (Tu, v) en H se puede mirar como un número que varía con u . Luego, $(Tu, v) = \ell(u)$ es un funcional lineal en H , y como T es acotado, usando la desigualdad de Schwarz se puede probar que $\ell(u)$ es acotado. Ahora, por el teorema de representación de Riesz existe un único elemento v_0 en H tal que $(Tu, v) = (u, v_0)$, $\forall u \in H$. Esto

implica que dado $v \in H$ existe un único v_0 asociado con v . En otras palabras, existe una aplicación $T' : H \rightarrow H$ tal que $v_0 = T'v$. En consecuencia,

$$(Tu, v) = (u, T'v), \quad \forall u, v \in H.$$

1.1.3. Distribuciones

En esta sección recogemos algunos resultados básicos sobre distribuciones. La teoría de distribuciones libera al cálculo diferencial de ciertas dificultades que provienen del hecho de que existen funciones no diferenciables. Este hecho extiende el cálculo a una clase de objetos llamados distribuciones o funciones generalizadas, que es mucho mayor que la clase de funciones diferenciables.

Definición y ejemplos

Hay varios hechos que tal extensión la hacen útil:

- Toda función continua es una distribución.
- Cualquier distribución tiene derivadas parciales que son distribuciones. Para funciones diferenciables la nueva noción de derivada coincide con la usual.
- Las reglas usuales del cálculo siguen siendo válidas.
- Es posible aplicar técnicas de transformada de Fourier a muchos problemas de EDP que no pueden ser resueltos por métodos clásicos.

NOTACIÓN: Sea Ω un abierto de \mathbb{R}^n ,

$$\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega) = \{\varphi \in C^\infty(\Omega) : \text{sop } \varphi \text{ es un compacto contenido en } \Omega\},$$

donde $\text{sop } \varphi = \overline{\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}}$.

$\mathcal{D}(\Omega)$ denota el espacio vectorial de las funciones de prueba.

Si K es un compacto de Ω entonces

$$\mathcal{D}_K(\Omega) = \{\varphi \in C^\infty(\Omega) : \text{sop } \varphi \subset K\}.$$

Ejemplo 1.1.2. Una función típica de $\mathcal{D}(\Omega)$ es

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \geq 1 \\ c \exp(\frac{1}{|x|^2-1}) & \text{si } |x| < 1, \end{cases}$$

donde $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$, la constante c se escoge de tal forma que $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = 1$; $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ y su soporte es la bola unitaria en \mathbb{R}^n , es decir, $\text{sop } \varphi = B_1(0)$.

Un multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n = \mathbb{N}^n \cup \{0\}$ es una n -tupla de enteros no negativos $\alpha_i \geq 0$. Para el multi-índice α definimos

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \quad \alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!,$$

$|\alpha|$ es el orden del multi-índice. Además, si β es un multi-índice,

$$\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n)$$

y $\alpha \geq \beta$ si y sólo si $\alpha_i \geq \beta_i$ para $i = 1, 2, \dots, n$.

Si $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ es un multi-índice, entonces definimos

$$\partial^\alpha u := \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}.$$

Por ejemplo, si $\alpha = (1, 0, 3)$, $|\alpha| = 4$, $u = u(x, y, z)$ entonces

$$\partial^\alpha u := \frac{\partial^4 u}{\partial x^1 \partial y^0 \partial z^3} = \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial z^3}.$$

CONVERGENCIA EN $\mathcal{D}(\Omega)$: Sea $(\varphi_j)_{j=1}^\infty$ una sucesión de funciones en $\mathcal{D}(\Omega)$, $\varphi_j \rightarrow \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, cuando $j \rightarrow \infty$ si:

- a) existe un compacto $K \subset \Omega$ tal que para cada j $\text{sop} \varphi_j \subset K$
- b) $\partial^\alpha \varphi_j \rightarrow \partial^\alpha \varphi$ uniformemente en K , para cada $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.

La convergencia uniforme en K de la sucesión $(\partial^\alpha \varphi_j)_{j=1}^\infty$ significa que

$$\sup_{x \in K} |(\partial^\alpha \varphi_j - \partial^\alpha \varphi)(x)| \rightarrow 0,$$

cuando $j \rightarrow \infty$. Como todos las φ_j y φ se anulan fuera de K entonces

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |(\partial^\alpha \varphi_j - \partial^\alpha \varphi)(x)| \rightarrow 0.$$

Una aplicación f es continua en $\mathcal{D}(\Omega)$ significa que para cada sucesión $(\varphi_j)_1^\infty$ con límite φ , se tiene $\langle f, \varphi_j \rangle \rightarrow \langle f, \varphi \rangle$, cuando $j \rightarrow \infty$.

Definición 1.1.3. Sea Ω un abierto de \mathbb{R}^n . La aplicación $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ es una distribución si

- a) T es lineal.
- b) Para cada compacto $K \subset \Omega$ existe una constante $C_K > 0$ y un entero no negativo m (depende de K) tal que

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C_K \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|,$$

para cada $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ y para cada multi-índice α .

En otras palabras, una distribución es un funcional lineal y continuo sobre $\mathcal{D}(\Omega)$. El espacio de todas las distribuciones sobre Ω se denota por $\mathcal{D}'(\Omega)$. Es decir, $\mathcal{D}'(\Omega) = \mathcal{L}(\mathcal{D}(\Omega), \mathbb{C})$ es el dual de $\mathcal{D}(\Omega)$.

Si el entero m se puede escoger independiente del compacto K , la distribución se llama de orden finito en Ω y al menor entero m se le llama el orden de la distribución.

Ejemplo 1.1.3. Sea f una función localmente integrable en Ω , es decir, f es medible Lebesgue y en todo compacto $K \subset \Omega$ se tiene $\int_K |f(x)|dx < \infty$. Le asociamos a f una aplicación $T_f : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx,$$

para cada $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. T_f está bien definida, pues para cada $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tenemos

$$\int_{\Omega} |f(x)\varphi(x)|dx = \int_K |f(x)||\varphi(x)|dx \leq c \int_K |f(x)|dx < \infty,$$

donde $c = \max_{x \in K} |\varphi(x)|$. T_f es una distribución de orden cero. En efecto,

a) T_f es claramente lineal.

b) Si K es un compacto de Ω y $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ entonces

$$\begin{aligned} |\langle T_f, \varphi \rangle| &\leq \int_{\Omega} |f(x)||\varphi(x)|dx \\ &\leq \max_{x \in K} |\varphi(x)| \int_K |f(x)|dx \\ &= C_K \max_{x \in K} |\varphi(x)|, \end{aligned}$$

donde $C_K = \int_K |f(x)|dx$. Acá $m = 0$ (independiente de K), luego $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y es de orden cero.

T_f se dice que es una distribución representada por f . Cuando una distribución se representa por una función localmente integrable, se llama una distribución regular. En caso contrario, una distribución singular.

Ejemplo 1.1.4. La forma lineal

$$\delta_x : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$$

definida por $\langle \delta_x, \varphi \rangle = \varphi(x)$, para cada $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ y cada $x \in \mathbb{R}^n$, es una distribución singular de orden cero. En efecto, si K es un compacto de \mathbb{R}^n y $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ entonces

$$|\langle \delta_x, \varphi \rangle| = |\varphi(x)| \leq \max_{x \in K} |\varphi(x)|,$$

acá $C_K = 1$ y $m = 0$.

Terminamos esta sección estudiando algunas de las más importantes propiedades de las distribuciones, tales como la multiplicación de una función por una distribución, derivación y convolución.

1. Multiplicación de una función $u \in C^\infty(\Omega)$ por una distribución T : Para cada $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ se define uT por

$$\langle uT, \varphi \rangle = \langle T, u\varphi \rangle,$$

uT está bien definida ya que si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ y $u \in C^\infty(\Omega)$ entonces $u\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

2. Derivada de una distribución: Si $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ y $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ se define la derivada de T para cada $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ por

$$\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle.$$

Ejemplo 1.1.5. La función escalón unitario o de Heaviside $H(x)$ definida en \mathbb{R} por

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0, \end{cases}$$

es una distribución regular representada por $T_H = H$ que satisface

$$\langle H, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} H(x)\varphi(x)dx = \int_0^\infty \varphi(x)dx,$$

para cada $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Su derivada en el sentido de las distribuciones es: $H' = \delta$. En efecto,

$$\begin{aligned} \langle H', \varphi \rangle &= - \int_{\mathbb{R}} H(x)\varphi'(x)dx \\ &= - \int_0^\infty \varphi'(x)dx \\ &= \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

3. Convolución de una función y una distribución: Primero recordemos la convolución de funciones. Sean f, g funciones continuas en \mathbb{R}^n y una de ellas tiene soporte compacto, su convolución $h = f * g$ se define por

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (\tau_x \tilde{f})(y)g(y)dy, \end{aligned}$$

donde $(\tau_x f)(y) = f(y - x)$ y $\tilde{f}(x) = f(-x)$.

En consecuencia, se justifica definir la convolución $T * \varphi$ de una distribución T y una función $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ como la función dada por

$$(T * \varphi)(x) := \langle T, \tau_x \tilde{\varphi} \rangle.$$

Se puede probar que $T * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Ejemplo 1.1.6. $(\delta * \varphi)(x) = \langle \delta, \tau_x \tilde{\varphi} \rangle = (\tau_x \tilde{\varphi})(0) = \varphi(x)$. Luego $\delta * \varphi = \varphi$.

Con el propósito de extender la transformada de Fourier a las distribuciones, definamos primero las funciones de decrecimiento rápido.

Definición 1.1.4. Sea $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. φ es una función de decrecimiento rápido si para cada α y β multi-índices, existe una constante positiva M tal que

$$|x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| \leq M, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

El conjunto de todas las funciones de decrecimiento rápido forma un espacio vectorial real (o complejo) y lo denotamos por $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Los elementos de este espacio se llaman *funciones de prueba de decrecimiento rápido*.

CONVERGENCIA EN $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$: Una sucesión (φ_j) converge a 0 en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ si y sólo si $x^\alpha \partial^\beta \varphi_j(x) \rightarrow 0$ uniformemente en \mathbb{R}^n cuando $j \rightarrow \infty$.

El dual topológico $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) := \mathcal{L}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \mathbb{C})$ se llama espacio de las distribuciones temperadas.

El funcional lineal $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ es continuo si para cada sucesión (φ_j) tal que $\varphi_j \rightarrow \varphi$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se tiene $\langle T, \varphi_j \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle$ para cada $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

1.1.4. Espacios de Sobolev

En este apartado introducimos los espacios de Sobolev y algunas de sus propiedades más importantes, como son el teorema de inmersión y el teorema de las trazas.

Si queremos estudiar la regularidad de una función de soporte compacto o de una distribución es usual analizar el comportamiento de su transformada de Fourier en el infinito. Una forma alterna de hacer este análisis es midiendo la diferenciabilidad en términos de normas de L_2 . La razón son dos:

- i) L_2 es un espacio de Hilbert.
- ii) La transformada de Fourier, la cual convierte diferenciación en multiplicación por polinomios, es una isometría (isomorfismo que preserva normas).

Definición 1.1.5. Sea $m \geq 0$, $p \geq 1$ y Ω un dominio de \mathbb{R}^n ($n \geq 2$). El espacio de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ se define como

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L_p(\Omega) : \partial^\alpha u \in L_p(\Omega), \quad \forall \alpha, \quad |\alpha| \leq m\}.$$

Es un espacio vectorial normado equipado con la norma de Sobolev

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} |\partial^{\alpha} u|^p dx \right)^{1/p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^{\alpha} u\|_{L_p(\Omega)}^p \right)^{1/p}.$$

Por ejemplo,

$$\|u\|_{W^{1,3}(\Omega)}^3 = \int_{\Omega} \left(|u|^3 + \left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|^3 + \left| \frac{\partial u}{\partial x_2} \right|^3 \right) dx_1 dx_2.$$

Propiedades

1. $W^{m,p}(\Omega) = \widetilde{C^m(\Omega)}$ (completado) en la norma de Sobolev $\|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)}$.
2. $(W^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)})$ es un espacio de Banach.
3. $\overline{C_0^m(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)} = W_0^{m,p}(\Omega) = \{u \in W^{m,p}(\Omega) : \partial^{\alpha} u|_{\partial\Omega} = 0, |\alpha| \leq m-1\}$, $W_0^{m,p}(\Omega)$ es un subespacio de $W^{m,p}(\Omega)$ (acá $\partial^{\alpha} u|_{\partial\Omega}$ denota la extensión de $\partial^{\alpha} u$ a la frontera de Ω).
4. $(W_0^{m,p}(\Omega))' := W^{-m,q}(\Omega)$, donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, se llaman espacios de Sobolev negativos (si $p = 1$, $(W^{m,1}(\Omega))' = W^{-m,\infty}(\Omega)$).
5. Si $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ y $v \in W^{-m,q}(\Omega)$ es integrable, entonces

$$\left| \int_{\Omega} uv dx \right| \leq \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} \|v\|_{W^{-m,q}(\Omega)}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

6. Si $m > k$ entonces

$$W^{m,p}(\Omega) \subset W^{k,p}(\Omega) \quad \text{y} \quad \|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq \|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)},$$

en particular, $W^{0,p}(\Omega) = L_2(\Omega)$ y $\|\cdot\|_{W^{0,p}(\Omega)} = \|\cdot\|_p$.

Si $p = 2$,

$$W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega) = \{u \in L_2(\Omega) : \partial^{\alpha} u \in L_2(\Omega), |\alpha| \leq m\},$$

$H^m(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con el producto interno definido por

$$\langle u, v \rangle_{H^m(\Omega)} = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} \partial^{\alpha} u \partial^{\alpha} v dx,$$

$u, v \in H^m(\Omega)$. La norma en $H^m(\Omega)$ es

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \sqrt{\langle u, v \rangle_{H^m(\Omega)}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L_2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.$$

Cuando $m = 1$, el espacio

$$H^1(\Omega) = \{u \in L_2(\Omega) : \partial^\alpha u \in L_2(\Omega), \quad |\alpha| \leq 1\}$$

se llama *espacio de energía*. En este espacio de Sobolev, la norma correspondiente es,

$$\|u\|_1 = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx + \sum_{|\alpha| \leq 1} \|\partial^\alpha u(x)\|^2 \right)^{1/2}.$$

Por ejemplo, si $\Omega \subset \mathbb{R}^2$,

$$\langle u, v \rangle_{H^2(\Omega)} = \int_{\Omega} [uv + u_x v_x + u_y v_y + u_{xx} v_{xx} + u_{xy} v_{xy} + u_{yy} v_{yy}] dx dy.$$

Si $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$,

$$\langle u, v \rangle_{H^m(\Omega)} = \int_a^b \sum_{k=0}^m \frac{d^k u}{dx^k} \frac{d^k v}{dx^k} dx.$$

Ejemplo 1.1.7. Sea $\Omega = (0, 2)$,

$$u(x) = \begin{cases} x^2 & 0 < x \leq 1, \\ 2x^2 - 2x + 1 & 1 < x < 2. \end{cases}$$

Entonces

$$u'(x) = \begin{cases} 2x & 0 < x \leq 1, \\ 4x - 2 & 1 < x < 2, \end{cases}$$

la cual es continua, la derivada débil es

$$u''(x) = \begin{cases} 2 & 0 < x \leq 1, \\ 4 & 1 < x < 2. \end{cases}$$

Se ve fácilmente que

$$u''(x) = 2H(x - 1)$$

y en consecuencia,

$$u'''(x) = 2\delta(x - 1) \notin L_2(0, 2).$$

Observe que u, u' y $u'' \in L_2(0, 2)$. Por tanto, $u \in H^2(0, 2)$, $u' \in H^1(0, 2)$ y $u'' \in H^0(0, 2) = L_2(0, 2)$.

En el estudio de los problemas de frontera, se tendrá condiciones de la forma $u = g(s)$ en la frontera Γ de un dominio Ω . Si $u \in H^1(\Omega)$ entonces se entenderá que g es la traza de $u(\mathbf{x})$ en la frontera y $g \in L_2(\Gamma)$. Si $u \in H^m(\Omega)$, $\partial^\alpha u \in H^1(\Omega)$ para $|\alpha| \leq m - 1$. Entonces a cada $\partial^\alpha u$ le corresponde una función $\partial^\alpha u(s) \in L_2(\Gamma)$. La función $\partial^\alpha u(s)$ se llama la traza de la función $\partial^\alpha u(\mathbf{x})$. Esto permite introducir, para $m \geq 2$, la derivada de $u \in H^m(\Omega)$ con respecto a la frontera Γ . Para $u \in H^m(\Omega)$ definimos

$$\gamma_1 u \equiv \frac{\partial u}{\partial \nu} := \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j}(s) \nu_j(s)$$

donde ν_j , ($j = 1, 2, \dots, n$) denota los cosenos directores del normal unitario y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. De igual manera se define $\gamma_i u \equiv \frac{\partial^i u}{\partial \nu_i}$ para cualquier $u \in H^m(\Omega)$, $m \geq i + 1$. El siguiente resultado es muy útil en la teoría de problemas de frontera.

Teorema 1.1.6. (Teorema de las trazas) *Los operadores trazas γ_j se pueden extender a operadores lineales continuos que aplican $H^m(\Omega)$ sobre $H^{m-j-1/2}(\Gamma)$,*

$$\|\gamma_j u\|_{m-j-1/2} \leq c_j \|u\|_m, \quad 0 \leq j \leq m - 1$$

donde c_j son constantes independientes de u .

El espacio nulo del operador traza γ_j es $H_0^m(\Omega)$,

$$\gamma_j(H_0^m(\Omega)) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, m - 1.$$

Espacios de Hölder

Sea Ω un conjunto abierto en \mathbb{R}^n , y $0 < \alpha \leq 1$. Una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ se llama continua Lipschitz si existe una constante positiva C tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq C \|x - y\|, \quad \forall x, y \in \Omega.$$

Observe que esta condición implica la continuidad de f . Ahora, f es continua Hölder con exponente α si existe una constante $C > 0$ tal que f satisface la desigualdad

$$|f(x) - f(y)| \leq C \|x - y\|^\alpha, \quad \forall x, y \in \Omega.$$

Si $k \geq 0$ es un entero, el espacio de Hölder $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ es el conjunto de las funciones $f \in C^k(\overline{\Omega})$ tales que todas las derivadas parciales de orden k son acotadas y Hölder continuas con exponente α . Cuando $\alpha = 1$, el espacio de Hölder $C^{0,1}(\overline{\Omega})$ consiste de todas las funciones continuas Lipschitz.

1.2. Transformada de Fourier

En esta sección se recordará la definición y algunas propiedades importantes de la transformada de Fourier.

Definición 1.2.1. Sea $f \in L_1(\mathbb{R})$ y $\omega \in \mathbb{R}$. La transformada de Fourier de f en ω se define por

$$\hat{f}(\omega) := \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Como

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)| |e^{-it\omega}| dt = \int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt = \|f\|_{L_1} < \infty$$

se tiene que la transformada de Fourier está bien definida. La aplicación $f \mapsto \hat{f}$ se llama transformación de Fourier y se denota por \mathcal{F} ($\mathcal{F}(f) = \hat{f}$). La función \hat{f} es continua y tiende a cero cuando $|\omega| \rightarrow \infty$ (Lema de Riemann-Lebesgue). Es claro que $\mathcal{F}(af + bg) = a\mathcal{F}(f) + b\mathcal{F}(g)$, para cada $a, b \in \mathbb{R}$.

En general \hat{f} no es una función integrable, por ejemplo, sea

$$f(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 1; \\ 0, & |t| > 1. \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \int_{-1}^1 e^{-it\omega} dt = \left[\frac{e^{-i\omega} - e^{i\omega}}{-i\omega} \right] \\ &= \frac{\text{sen } \omega}{\omega} \notin L_1(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Si $\hat{f}(\omega)$ es integrable, entonces existe una versión continua de f y se puede obtener la fórmula de inversión de Fourier

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}(\omega)) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (1.2.1)$$

La siguiente proposición recoge algunas propiedades fundamentales de la transformada de Fourier.

Proposición 1.2.2. Sean $f, g \in L_1(\mathbb{R})$, entonces

1. $\widehat{(T_x f)}(\omega) = e^{-i\omega x} \hat{f}(\omega)$, donde $(T_a f)(t) = f(t - a)$.
2. $(T_x \hat{f})(\omega) = \widehat{(e^{ix(\cdot)} f)}(\omega)$
3. $\widehat{f * g} = \hat{f} \hat{g}$

4. Si $\epsilon > 0$ y $g_\epsilon(t) = g(\epsilon t)$ entonces $\hat{g}_\epsilon(\omega) = \epsilon^{-1}\hat{g}(\omega/\epsilon)$.

Otro resultado útil es el siguiente: Si $f, g \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$, entonces

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \quad (\text{fórmula de Plancherel}) \quad (1.2.2)$$

$$\langle f, g \rangle_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{g}(\omega)} d\omega \quad (\text{fórmula de Parseval}). \quad (1.2.3)$$

Por extensión, la transformada de Fourier se puede definir para cualquier $f \in L_2(\mathbb{R})$. En virtud a que el espacio $L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$ es denso en $L_2(\mathbb{R})$. Luego, por isometría (excepto por el factor $1/2\pi$) se define \hat{f} para cualquier $f \in L_2(\mathbb{R})$, y las fórmulas (1.2.2) y (1.2.3) permanecen válidas para todo $f, g \in L_2(\mathbb{R})$.

Si f es tal que $\int_{\mathbb{R}} |t|^k |f(t)| dt < \infty$, para algún entero $k \geq 1$, entonces

$$\frac{d^k}{d\omega^k} \hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} (-it)^k e^{-i\omega t} f(t) dt. \quad (1.2.4)$$

Recíprocamente, si $\int_{\mathbb{R}} |\omega|^k |\hat{f}(\omega)| d\omega < \infty$, entonces

$$(i\omega)^k \hat{f}(\omega) = \mathcal{F}(f^{(k)})(\omega). \quad (1.2.5)$$

1.2.1. Serie de Fourier

Sea f una función 2π -periódica en \mathbb{R} . Se escribirá $f \in L_p(0, 2\pi)$ si

$$f(t)\chi_{[0, 2\pi]}(t) \in L_p(0, 2\pi), \quad p \geq 1.$$

Cualquier función f , 2π -periódica en \mathbb{R} , tal que $f \in L_2(0, 2\pi)$, se puede representar por una serie de Fourier convergente en $L_2(0, 2\pi)$

$$f(t) = \sum_n c_n e^{int},$$

donde los coeficientes de Fourier son dados por

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt.$$

Se puede verificar que si $f \in L_1(\mathbb{R})$, entonces la serie

$$S(t) = \sum_k f(t + 2k\pi) \quad (1.2.6)$$

converge casi para todo t y pertenece a $L_1(0, 2\pi)$. Además, los coeficientes de Fourier de $S(t)$ están dados por

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \hat{f}(k) = \mathcal{F}^{-1}(f)(-k).$$

En efecto, para ver la expresión (1.2.6), basta probar que

$$\int_0^{2\pi} \sum_k |f(t + 2k\pi)| dt < \infty.$$

Para la segunda parte se calcula los coeficientes de Fourier

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\sum_k f(t + 2k\pi) \right] e^{-ikt} dt.$$

Intercambiando la suma con la integral se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_k \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t + 2k\pi) e^{-ikt} dt &= \sum_k \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} f(z) e^{-ikz} dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \hat{f}(k). \end{aligned}$$

La identidad de Green

Otro resultado que será utilizado en la construcción de las funciones de Green, es la identidad de Green.

Sean u y g dos funciones continuas a tramos y S una superficie cerrada que contiene un sólido Q . Si u y g son de clase C^2 sobre S , entonces

$$\int_Q (g \nabla^2 u - u \nabla^2 g) dV = \oint_S \left(g \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial g}{\partial \nu} \right) dS,$$

donde $\frac{\partial}{\partial \nu}$ es la derivada direccional en dirección al normal unitario exterior ν a S y $\nabla^2 u = \Delta u$ es el Laplaciano de u . En efecto,

$$\nabla \cdot (g \nabla u) = \nabla g \cdot \nabla u + g \nabla^2 u$$

y

$$\nabla \cdot (u \nabla g) = \nabla u \cdot \nabla g + u \nabla^2 g$$

entonces

$$\int_Q \nabla \cdot (g \nabla u - u \nabla g) dV = \int_Q (g \nabla^2 u - u \nabla^2 g) dV.$$

Del teorema de la divergencia de Gauss se tiene

$$\int_Q \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \oint_S \mathbf{F} \cdot \nu dS,$$

para cualquier campo vectorial \mathbf{F} . De donde

$$\begin{aligned} \int_Q (g \nabla^2 u - u \nabla^2 g) dV &= \oint_S (g \nabla u - u \nabla g) \cdot \nu dS \\ &= \oint_S \left(g \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial g}{\partial \nu} \right) dS, \end{aligned}$$

donde $\nabla(\cdot) \cdot \nu = \frac{\partial(\cdot)}{\partial \nu}$.

Otra identidad que es consecuencia del teorema de la divergencia y que utilizaremos frecuentemente es la siguiente

$$-\int_Q v \nabla^2 u dV = \int_Q \nabla u \cdot \nabla v dV - \oint_S \frac{\partial u}{\partial \nu} v dS. \quad (1.2.7)$$

La notación O y o

La expresión $f(x) = O(g(x))$ significa que existe una constante positiva M tal que $|f(x)| \leq M|g(x)|$, siempre que $x \rightarrow x_0$. En otras palabras, si $g(x) \neq 0$ entonces $|\frac{f(x)}{g(x)}| \rightarrow M$, cuando $x \rightarrow x_0$. Se dice que f es de orden g cerca de $x = x_0$.

La expresión $f(x) = o(g(x))$ significa que $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

CAPÍTULO 2

La ecuación de Helmholtz

Las funciones de Green se usan principalmente para resolver ciertos tipos de ecuaciones diferenciales parciales lineales no homogéneas, sin embargo, algunas ecuaciones diferenciales parciales homogéneas pueden ser solucionadas mediante esta aproximación. Se puede decir que las funciones de Green transforman una ecuación diferencial parcial que representa un problema físico en una ecuación integral de la función de Green asociada con la ecuación diferencial parcial. La función de Green está considerada como una de las más poderosas herramientas que tenemos para resolver distintos tipos de ecuaciones diferenciales parciales, en particular la ecuación de Helmholtz como una aplicación del área de óptica.

El objetivo entonces de este Capítulo, es estudiar la función de Green como solución de la ecuación de Helmholtz. Además desarrollaremos algunos resultados clásicos que se necesitan en el estudio de la función de Green para la solución de la ecuación no homogénea de Helmholtz. El tema es bastante clásico, y como tal lo desarrollamos por motivos de completitud siguiendo [9], [13], [14], [24], [33], [41] y [45].

2.1. Solución a la ecuación de Helmholtz

Consideremos la ecuación de onda 3-D

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = -q(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0 \quad (2.1.1)$$

donde Δu es el Laplaciano de u y $q(t, x)$ es una fuente. Si $q(t, x) = q(x)e^{-i\omega t}$ representa una fuente oscilatoria con frecuencia ω , entonces el movimiento completo se reduce a una onda moviéndose con la misma frecuencia ω después de un período inicial transitorio. Si escribimos las soluciones en la forma

$$u(t, x) = u(x)e^{-i\omega t}$$

entonces al sustituir en la ecuación (2.1.1) se obtiene la ecuación de Helmholtz en 3-D

$$(\Delta + k^2)u(x) = -f(x), \quad (2.1.2)$$

donde $k = \omega/c$ y $f(x) = \frac{1}{c^2}q(x)$.

La función $u(x)$ satisface esta ecuación en algún dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, con frontera $\Gamma = \partial\Omega$, la cual supondremos de clase C^2 . En muchas aplicaciones, el dominio Ω usualmente representa un obstáculo en el cual un campo de onda incidente es dispersado, por esta razón nos referiremos a Ω como el obstáculo.

Además, supondremos que la ecuación (2.1.2) satisface alguna condición de frontera dada; como también la condición de radiación de Sommerfeld:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r(\partial_r u - iku) = 0, \quad (2.1.3)$$

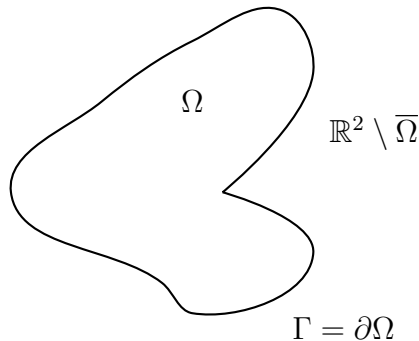
donde $r = |x|$ es la norma Euclídea. Este límite es uniforme en todas las direcciones. Esta condición físicamente establece que la solución se comporta bien con el “alejamiento” de las ondas generadas por la fuente. Matemáticamente, se requiere para que el problema exterior tenga solución única. El límite anterior, usualmente se escribe

$$\partial_r u - iku = o(1/r), \quad r \rightarrow \infty$$

entendiendo que un límite radial es uniforme a lo largo de todos radios.

Las condiciones de frontera más comunes son

- la condición de frontera de Dirichlet $u|_{\Gamma} = h_0$,
- la condición de frontera de Neumann $\partial_\nu u|_{\Gamma} = h_1$, acá $\partial_\nu u$ es la derivada normal de u en la dirección de la normal exterior ν ,
- la condición de frontera de Robin, es una combinación lineal de las condiciones de Dirichlet y Neumann.



Podemos resumir lo anterior para el caso donde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, diciendo: dado el dato $h : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ y la función $u : \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$ que satisface

$$(\Delta + k^2)u(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega} \quad (2.1.4)$$

$$Bu(x) = h(x), \quad x \in \Gamma \quad (2.1.5)$$

$$\partial_r u - iku = o(1/r), \quad r \rightarrow \infty \quad \text{uniformemente}, \quad (2.1.6)$$

donde el operador B representa una de las condiciones de frontera antes mencionadas: Dirichlet, Neumann o Robin. Comentemos también que el espacio de funciones en donde el dato y la solución viven, depende si consideramos soluciones en el sentido clásico o débil. En la teoría clásica, las soluciones que satisfacen (2.1.4) - (2.1.6) se encuentran en el espacio $C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}) \cap C(\mathbb{R}^2 \setminus \Omega)$, en el caso de un problema de Dirichlet. Para el problema exterior, con condiciones de frontera de Neumann, se requiere que u posea derivada normal en la frontera, en el sentido de la convergencia uniforme, es decir, el límite

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) := \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ a > 0}} \nu(x) \cdot \nabla u(x - a\nu(x))$$

exista uniformemente en Γ , $\nu(x)$ es el normal unitario exterior a Γ en x . Suponemos también que $h \in C(\Gamma)$ para el dato.

2.1.1. Construcción de la función de Green

A continuación se presentará la forma de obtener la función de Green en dos y tres dimensiones. Para ello se definirá la función de Green g como una solución fundamental de la ecuación (2.1.2), esto es, reemplazando el término fuente por la medida de Dirac, que representa un punto fuente en r_0 .

Consideremos la ecuación de Helmholtz en \mathbb{R}^2

$$(\Delta + k^2)g(r|r_0) = -\delta(r - r_0) \quad (2.1.7)$$

sujeta a las condiciones de frontera

$$g(r|r_0) \rightarrow 0, \quad g_r(r|r_0) \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad |r| \rightarrow \infty,$$

donde r y r_0 son vectores de posición en \mathbb{R}^2 . Recuerde que

$$\delta(r - r_0) \equiv \delta(x - x_0)\delta(y - y_0).$$

También nótese que g es una función de la longitud de la trayectoria $|r - r_0|$. Para la solución de la ecuación (2.1.7) expresamos g y δ como transformadas inversas de Fourier, con $R = r - r_0$ y se obtiene

$$g(R) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} G(v) e^{iv \cdot R} dv \quad (2.1.8)$$

y

$$\delta(R) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{iv \cdot R} dv.$$

Sustituyendo estas dos expresiones en la ecuación (2.1.7) se tiene

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} (-v^2 + k^2) G(v) e^{iv \cdot R} dv = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{iv \cdot R} dv$$

de donde

$$G(v) = \frac{1}{v^2 - k^2}.$$

Al reemplazar en (2.1.8) se obtiene

$$g(R) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{iv \cdot R}}{v^2 - k^2} dv.$$

En coordenadas polares esta integral se expresa como

$$g(R) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ivR \cos \theta}}{v^2 - k^2} v dv d\theta.$$

Integrando primero sobre v y usando el teorema del residuo de Cauchy [43] tenemos

$$\oint_C \frac{ze^{izR \cos \theta}}{(z+k)(z-k)} dz = i\pi e^{ikR \cos \theta}$$

donde el contorno de integración C se escogió de manera que encerrara uno de los polos en $z = k$. La ecuación anterior es precisamente una expresión para la función de Green saliente, en la cual la onda se propaga de un punto de perturbación en r_0 . Una solución para el polo en $z = -k$ dará una solución que representa un campo de onda convergiendo en r_0 . La función de Green saliente es usualmente el resultado físicamente más significativo. De este modo, la función saliente de Green puede escribirse en la forma

$$g(R) = \frac{i}{4\pi} \int_0^\pi e^{ikR \cos \theta} d\theta.$$

Escribiendo la función de Green en esta forma permite emplear el resultado

$$H_0^{(1)}(kR) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{ikR \cos \theta} d\theta,$$

donde $H_0^{(1)}$ es la función de Hankel (de primera clase y de orden cero) [50]. Esta es la representación integral para la transformada Hankel y ésta se puede usar para escribir la función de Green en dos dimensiones como

$$g(r|r_0) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|r - r_0|).$$

Una forma útil de esta función es su aproximación asintótica [32]

$$H_0^{(1)}(kR) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-i\pi/4} \frac{e^{-ikR}}{\sqrt{kR}},$$

esta expresión es válida cuando $kR \gg 1$. Esta condición significa que la longitud de onda de la onda originada desde r_0 es muy pequeña comparada con la distancia entre r y r_0 lo cual es físicamente razonable en muchos casos y así la función de Green de dos dimensiones puede usarse de la siguiente forma

$$g(r|r_0) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} e^{i\pi/4} \frac{e^{ik|r-r_0|}}{\sqrt{k|r-r_0|}}.$$

En tres dimensiones, el espacio libre de la función de Green está dado por la solución a la ecuación

$$(\Delta + k^2)g = -\delta(x), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad (2.1.9)$$

donde $g(x|x_0)$ es la función de Green. Usando coordenadas esféricas el Laplaciano en 3-D, se expresa en términos de la coordenada radial r

$$\Delta g = g_{rr} + \frac{2}{r} g_r, \quad (2.1.10)$$

luego (2.1.10) toma la forma

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial g}{\partial r} \right) + k^2 g = -\delta(r), \quad (2.1.11)$$

con $0 < r < \infty$ y la condición de radiación (2.1.3).

Para $r > 0$, la función g satisface la ecuación homogénea

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial g}{\partial r} \right) + k^2 g = 0,$$

o equivalentemente,

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rg) + k^2(rg) = 0.$$

Esta ecuación admite una solución de la forma

$$rg(r) = Ae^{ikr} + Be^{-ikr}$$

o

$$g(r) = A\frac{e^{ikr}}{r} + B\frac{e^{-ikr}}{r}, \quad (2.1.12)$$

donde A y B son constantes arbitrarias. Para que se satisfaga la condición de radiación, debemos escoger $B = 0$. Luego la solución (2.1.12) se transforma en

$$g(r) = A\frac{e^{ikr}}{r},$$

para determinar A , se integra la ecuación (2.1.9) sobre una superficie esférica de radio ϵ , S_ϵ . De la definición de la función delta, esta integral debe ser igual a

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_V (\Delta + k^2)g(r)dV = -1, \quad (2.1.13)$$

donde $dV = 4\pi r^2 dr$. Sustituyendo (2.1.12) con $B = 0$ obtenemos

$$4\pi A \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_0^\epsilon \Delta \frac{e^{ikr}}{r} r^2 dr + k^2 \int_0^\epsilon e^{ikr} r dr \right] = -1.$$

La segunda integral se anula, mientras el término restante es integrado por medio del teorema de la divergencia de Gauss, con

$$\mathbf{F} = \nabla \left(\frac{Ae^{ikr}}{r} \right) = \frac{\partial g(r)}{\partial r} = \frac{A}{r} e^{ikr} \left(ik - \frac{1}{r} \right).$$

De donde,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} \frac{\partial g}{\partial r} dS = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} \frac{A}{r} e^{ikr} \left(ik - \frac{1}{r} \right) dS = -1,$$

de lo cual se obtiene $A = \frac{1}{4\pi}$, cuando $\epsilon \rightarrow 0$. En consecuencia, la función de Green toma la forma

$$g(r) = \frac{e^{ikr}}{4\pi r}.$$

Esta es la función de Green de espacio libre. Físicamente, esta función representa el alejamiento de ondas esféricas radiando siempre desde la fuente en el origen.

Con un punto fuente en r_0 , la función de Green es dada por

$$g(r|r_0) = \frac{e^{ik|r-r_0|}}{4\pi|r-r_0|},$$

donde r y r_0 son vectores de posición en \mathbb{R}^3 . Finalmente, cuando $k = 0$, este resultado se reduce a la función de Green para la ecuación de Poisson en 3-D.

Observe que la función de Green es singular. En tres dimensiones, la función de Green es singular espacialmente cuando $r = r_0$, mientras que en dos dimensiones, la función de Green es una función Hankel, cuyo argumento es $k|r-r_0|$ y tiene los dos tipos de singularidades: la espacial y la temporal, éstas se presentan en $k = 0$ o $r = r_0$.

2.1.2. Función de Green como solución de la ecuación de Helmholtz

El propósito de esta sección es encontrar una solución para la ecuación de Helmholtz no homogénea. Pero como motivación, analicemos el caso para el campo de onda $u(x)$ generado por una fuente arbitraria $f(x)$.

En tres dimensiones se busca entonces resolver la ecuación

$$(\Delta + k^2)u(x) = -f(x), \quad x \in V \subset \mathbb{R}^3 \quad (2.1.14)$$

donde V es el volumen de la función fuente la cual tiene soporte compacto. Es importante hacer notar que se supone la fuente como $-f$ en vez de $+f$, en coherencia con la definición de la función de Green donde se supone por conveniencia el término $-\delta$. Se sabe que la ecuación para la función de Green está dada por

$$(\Delta + k^2)g(x|x_0) = -\delta(x - x_0). \quad (2.1.15)$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación (2.1.14) por g , los de la ecuación (2.1.15) por u y restando los dos resultados obtenemos

$$g\Delta u - u\Delta g = -gf + u\delta. \quad (2.1.16)$$

Suponemos que la fuente está confinada en una región infinita del espacio con un volumen finito V , mientras que fuera de esta región se supone que la función fuente es cero. Integrando la ecuación (2.1.16) sobre V y teniendo en cuenta que

$$\int u(x)\delta(x - x_0)dV = u(x_0)$$

se obtiene el siguiente resultado

$$u(x_0) = \int_V f(x)g(x|x_0)dV + \int_V \left[g(x|x_0)\Delta u(x) - u(x)\Delta g(x|x_0) \right] dV.$$

Como en esta expresión la función u aparece en ambos lados, entonces dicha ecuación no es propiamente una solución para u . Para obtener una solución en términos de cantidades conocidas, podemos simplificar el segundo término usando la identidad de Green

$$\int_V (g\Delta u - u\Delta g)dV = \oint_S (g\nabla u - u\nabla g) \cdot \nu dS,$$

donde S es la superficie que contiene el volumen V y ν es el normal unitario exterior a S . Además, si imponemos las condiciones de frontera homogéneas de Dirichlet y Neumann sobre la superficie S se tiene

$$\oint_S (g\nabla u - u\nabla g) \cdot \nu dS = 0.$$

En consecuencia,

$$u(x_0) = \int_V f(x)g(x|x_0)dV.$$

El método descrito para encontrar el campo de onda no homogéneo, se puede aplicar para resolver la ecuación de Helmholtz no homogénea

$$(\Delta + k^2)u(x) = -k^2\gamma(x)u(x), \quad x \in \mathbb{R}^3 \quad (2.1.17)$$

donde γ es una función no homogénea la cual es responsable de la dispersión del campo de onda u , y por tanto se llama algunas veces como el dispersor. Usualmente se considera de soporte compacto.

Teniendo presente el anterior desarrollo, la solución con $f(x) = k^2\gamma(x)u(x)$, es dada por

$$u(x_0) = k^2 \int_V \gamma u dV + \oint_S (g\nabla u - u\nabla g) \cdot \nu dS.$$

Para calcular la integral de superficie, se debe escoger una condición para el comportamiento de u sobre la superficie S de γ . Considere el caso donde el campo de onda incidente u_{inc} es una onda plana simple con amplitud unitaria $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ que satisfaga la ecuación de onda homogénea

$$(\Delta + k^2)u_{inc}(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Escogiendo la condición $u(x) = u_{inc}(x)$ sobre la superficie de γ , obtenemos

$$u(x_0) = k^2 \int_V g \gamma u dV + \oint_S (g \nabla u_{inc} - u_{inc} \nabla g) \cdot \nu dS.$$

Ahora, usando la identidad de Green transformamos la integral de superficie en una integral de volumen

$$\oint_S (g \nabla u_{inc} - u_{inc} \nabla g) \cdot \nu dS = \int_V (g \Delta u_{inc} - u_{inc} \Delta g) dV.$$

Nótese que

$$\Delta u_{inc} = -k^2 u_{inc} \quad \text{y} \quad \Delta g = -\delta - k^2 g,$$

de lo cual se obtiene

$$\int_V (g \Delta u_{inc} - u_{inc} \Delta g) dV = \int_V \delta u_{inc} dV = u_{inc}.$$

Por tanto, escogiendo el campo u igual al campo de onda incidente u_{inc} sobre la superficie de γ , obtenemos una solución de la forma $u = u_{inc} + u_{scat}$, donde $u_{scat} = k^2 \int_V g \gamma u dV$. El campo de onda u_{scat} frecuentemente se conoce como el dispersor.

Observación 2.1.1. Un hecho de resaltar en el estudio de las funciones de Green es la propiedad de simetría. Esto es, si x_1 y x_2 son dos puntos de \mathbb{R}^3 , entonces

$$g(x_1|x_2) = g(x_2|x_1).$$

En efecto, consideremos las ecuaciones

$$(\Delta + k^2)g(x|x_1) = -\delta(x - x_1)$$

y

$$(\Delta + k^2)g(x|x_2) = -\delta(x - x_2).$$

Entonces

$$g(x|x_2)\Delta g(x|x_1) - g(x|x_1)\Delta g(x|x_2) = g(x|x_1)\delta(x - x_2) - g(x|x_2)\delta(x - x_1).$$

Integrando sobre $V \subseteq \mathbb{R}^3$, y usando la identidad de Green con las condiciones de frontera homogéneas de Dirichlet y Neumann sobre la superficie de V se tiene

$$\int_V g(x|x_1)\delta(x - x_1)dV - \int_V g(x|x_2)\delta(x - x_2)dV = 0,$$

de donde

$$g(x_2|x_1) = g(x_1|x_2).$$

Esto significa que la propagación de una onda de un punto x_1 a un punto x_2 es lo mismo que la propagación de una onda de x_2 a x_1 .

2.1.3. La condición de radiación de Sommerfeld

La condición de radiación de Sommerfeld es una condición de frontera extra para el problema exterior de Helmholtz con el fin que la solución encontrada sea única. Ilustremos como es usual en este trabajo, considerando la ecuación de Helmholtz en \mathbb{R}^2

$$\Delta u + k^2 u = 0$$

sobre el exterior del disco de radio a y centro en el origen, sujeto a la condición de frontera $u(a, \theta) = c$ (constante). En este caso, la solución es una función completamente radial que satisface la ecuación de Bessel de orden cero

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + k^2 u = 0.$$

Las dos soluciones linealmente independientes de esta ecuación son las funciones de Hankel de orden cero $H_0^{(1)}(kr)$ y $H_0^{(2)}(kr)$ de primera y segunda clase, respectivamente (ver p.e., [50]). Por tanto, las dos soluciones distintas del problema de frontera están dadas por

$$u_1(r) = \frac{c}{H_0^{(1)}(ka)} H_0^{(1)}(kr) \quad \text{y} \quad u_2(r) = \frac{c}{H_0^{(2)}(ka)} H_0^{(2)}(kr).$$

Físicamente, la primera solución u_1 representa una onda saliendo mientras u_2 es una onda entrando. De las dos, solamente u_1 satisface la condición de radiación de Sommerfeld, y en virtud del comportamiento asintótico de las funciones de Hankel para un argumento grande se tiene

$$H_0^{(1,2)}(kr) = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{[\pm i(kr - \pi/4)]} \left[1 + O\left(\frac{1}{kr}\right) \right], \quad r \rightarrow \infty.$$

Por tanto, agregando la condición de Sommerfeld, el problema de frontera para la ecuación de Helmholtz en el exterior del disco, tiene solución única.

La condición de radiación fue formulada por Arnold Sommerfeld en 1912 en su artículo [44] sobre la función de Green de la ecuación de Helmholtz. Comenzando con la observación que, en contraste al potencial teórico ($k = 0$), la ecuación de Helmholtz posee funciones propias de espacio libre que se anulan en infinito, Sommerfeld concluye que anularse en el infinito no es condición suficientemente fuerte para garantizar la unicidad de las soluciones del problema de frontera exterior para la ecuación de Helmholtz. Él explica esto interpretando las soluciones de la ecuación de Helmholtz como la parte espacial de las soluciones de tiempo armónico de la ecuación de onda.

Existe también una interpretación de la condición de radiación en términos de flujo de energía [16, Vol. 1, pp. 645]. Para ver esto, consideremos

la ecuación de onda independiente del tiempo y supongamos que v es una solución suficientemente suave de

$$v_{tt} - \Delta v = 0, \quad \text{en } \Omega \times \mathbb{R},$$

donde Ω es un dominio acotado regular. Después de multiplicar la ecuación por \bar{v}_t , e integrando sobre Ω , aplicando el teorema de la divergencia, tomando las partes reales y haciendo uso de las identidades

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} |v_t|^2 = \operatorname{Re} \bar{v}_t v_{tt} \quad \text{y} \quad \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} |\nabla v|^2 = \operatorname{Re} \nabla \bar{v}_t \cdot \nabla v,$$

se obtiene la identidad

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \frac{1}{2} (|v_t|^2 + |\nabla v|^2) dx - \operatorname{Re} \int_{\Gamma} \bar{v}_t \frac{\partial v}{\partial \nu} dS = 0. \quad (2.1.18)$$

Observe que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} |v_t|^2 &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (v_t \bar{v}_t) = \frac{1}{2} (v_{tt} \bar{v}_t + v_t \bar{v}_{tt}) \\ &= \frac{1}{2} (v_{tt} \bar{v}_t + \overline{v_{tt} \bar{v}_t}) = \operatorname{Re} \bar{v}_t v_{tt}. \end{aligned}$$

De manera análoga se prueba la otra identidad. Ahora, definiendo las cantidades

$$\begin{aligned} E_{\Omega}(v, t) &:= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|v_t|^2 + |\nabla v|^2) dx \\ I_{\Gamma}(v, t) &:= -\operatorname{Re} \int_{\Gamma} \bar{v}_t \frac{\partial v}{\partial \nu} dS. \end{aligned}$$

La primera expresión representa la energía de la onda contenida en Ω en el tiempo t , mientras la segunda representa el flujo hacia afuera de la energía a través de la frontera de Ω en el instante t . Por tanto, la ecuación (2.1.18) establece que

$$\frac{\partial}{\partial t} E_{\Omega}(v, t) + I_{\Gamma}(v, t) = 0,$$

es decir, la energía que crece en el dominio es balanceada por su flujo hacia afuera a través de la frontera. Retornando al caso de tiempo armónico $v(x, t) = e^{-ikt} u(x)$ obtenemos

$$\begin{aligned} E_{\Omega}(v, t) &\equiv E_{\Omega}(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (k^2 |u|^2 + |\nabla u|^2) dx \\ I_{\Gamma}(v, t) &\equiv I_{\Gamma}(u) = -\operatorname{Re} \left[ik \int_{\Gamma} \bar{u} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS \right], \end{aligned}$$

es decir, la energía en el dominio es constante y por tanto el flujo $I_\Gamma(u)$ debe anularse también. Ahora aplicaremos este resultado a un problema exterior. En efecto, supongamos que Ω contiene al conjunto compacto K y sea $\Omega' = \Omega \setminus K$, en [16] se prueba que, dado cualquier dominio regular Ω_0 tal que $K \subset \Omega_0 \subset \bar{\Omega}_0 \subset \Omega$, entonces si u es una solución de la ecuación homogénea de Helmholtz en Ω' , la cantidad

$$I(u) := -\operatorname{Re} \left[ik \int_\Gamma \bar{u} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS \right]$$

es independiente de la elección de Ω_0 . $I(u)$ se llama el flujo de energía de u y la solución u saldrá o entrará dependiendo de si $I(u) \geq 0$ o $I(u) \leq 0$. La siguiente proposición demuestra que, si la condición de radiación de Sommerfeld se tiene, entonces la solución está saliendo.

Proposición 2.1.1. *Sea u una solución de la ecuación homogénea de Helmholtz $\Delta u + k^2 u = 0$ en $\mathbb{R}^n \setminus K$, K un compacto y sea Γ_R la frontera de la bola de radio R alrededor del origen. Si u también satisface la condición de radiación de Sommerfeld, entonces $I(u) \geq 0$, en particular,*

$$I(u) = k^2 \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} |u|^2 dS. \quad (2.1.19)$$

Demostración. Para R suficientemente grande, se obtiene

$$\begin{aligned} I(u) &= -\operatorname{Re} ik \int_{\Gamma_R} \bar{u} u_r dS \\ &= -\operatorname{Re} \left[ik \int_{\Gamma_R} (u_r - iku) \bar{u} dS \right] + k^2 \int_{\Gamma_R} |u|^2 dS. \end{aligned} \quad (2.1.20)$$

Nótese que $-\operatorname{Re} \left[ik \int_{\Gamma_R} -iku \bar{u} dS \right] = -k^2 \int_{\Gamma_R} |u|^2 dS$. Aplicando la desigualdad de Schwarz se tiene

$$\left| \operatorname{Re} ik \int_{\Gamma_R} (u_r - iku) \bar{u} dS \right| \leq \left(\int_{\Gamma_R} |u_r - iku|^2 dS \right)^{1/2} \left(k^2 \int_{\Gamma_R} |u|^2 dS \right)^{1/2}. \quad (*)$$

Al aplicar la desigualdad triangular a (2.1.20) y usando la última desigualdad se obtiene

$$\begin{aligned} k^2 \int_{\Gamma_R} |u|^2 dS &\leq |I(u)| + \left| \operatorname{Re} ik \int_{\Gamma_R} (u_r - iku) \bar{u} dS \right| \\ &\leq |I(u)| + \left(\int_{\Gamma_R} |u_r - iku|^2 dS \right)^{1/2} \left(k^2 \int_{\Gamma_R} |u|^2 dS \right)^{1/2} \\ &\leq |I(u)| + \int_{\Gamma_R} |u_r - iku|^2 dS + \frac{1}{4} k^2 \int_{\Gamma_R} |u|^2 dS, \end{aligned}$$

en el último paso se aplicó la desigualdad $ab \leq a^2 + (\frac{1}{2}b)^2$, para $a, b \geq 0$, agrupando términos se tiene

$$k^2 \int_{\Gamma_R} |u|^2 dS \leq \frac{4}{3} \left(|I(u)| + \int_{\Gamma_R} |u_r - iku|^2 dS \right).$$

Si $R \rightarrow \infty$ y en virtud que u satisface la condición de Sommerfeld, la última desigualdad demuestra que $k^2 \int_{\Gamma_R} |u|^2 dS$ está acotada cuando $R \rightarrow \infty$. Así, (2.1.20) y (*) implican (2.1.19). \square

La prueba que la condición de radiación implica unicidad se encuentra en [16, Vol. 1, pp. 651].

2.1.4. El método de la ecuación integral

En el estudio de la teoría del potencial clásica, en el caso $k = 0$, el primer resultado de existencia y unicidad concerniente a problemas de frontera para la ecuación de Helmholtz, viene de la teoría de las ecuaciones integrales. Por tal motivo presentamos en este apartado una descripción del método de las ecuaciones integrales en la solución de la ecuación de Helmholtz. Las pruebas de los teoremas citados se encuentran en [9]. Es de notar también que la ecuación de Helmholtz se puede estudiar a la luz de la teoría de problemas de frontera de ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden (ver p.e., [21], [23], [33], [34] o [47]).

El método de la ecuación integral se basa en buscar soluciones de la ecuación de Helmholtz en cualquiera de las formas

$$v(x) = (\tilde{S}\varphi)(x) := \int_{\Gamma} g(x|y)\varphi(y)dS_y, \quad x \notin \Gamma \quad (2.1.21)$$

o

$$w(x) = (\tilde{K}\psi)(x) := \int_{\Gamma} \frac{\partial g(x|y)}{\partial \nu(y)} \psi(y)dS_y, \quad x \notin \Gamma, \quad (2.1.22)$$

donde

$$g(x|y) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|x-y|), \quad x \neq y$$

es la función de espacio libre de la ecuación de Helmholtz y $H_0^{(1)}$ es la función de Hankel de primera clase y orden cero. Las funciones $\varphi, \psi \in C(\Gamma)$ son usualmente referidas como densidades y \tilde{S} y \tilde{K} son los operadores de una y doble capa, respectivamente. Las funciones $v = \tilde{S}\varphi$ y $w = \tilde{K}\psi$ en (2.1.21) y (2.1.22), se conocen como potencial de una y doble capa, respectivamente, son soluciones analíticas de la ecuación de Helmholtz y satisfacen la condición

de radiación de Sommerfeld [48]. El comportamiento cuando x se aproxima a la frontera está dado por las condiciones de salto [29]. Esto es, para funciones definidas en una vecindad de Γ definimos para $x \in \Gamma$

$$u_+(x) = \lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}}} u(y) \quad \text{y} \quad u_-(x) = \lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in \Omega}} u(y).$$

El siguiente teorema recoge algunas propiedades de los potenciales de capa, la prueba se encuentra en [9].

Teorema 2.1.2. *Los potenciales de capa (2.1.21) y (2.1.22) tienen las siguientes propiedades:*

1. *El potencial de una capa v con densidad $\varphi \in C(\Gamma)$ es uniformemente continuo Hölder en \mathbb{R}^2 con $\|v\|_{\alpha, \mathbb{R}^2} \leq c(\alpha, \Gamma) \|\varphi\|_{\alpha, \Gamma}, \forall \alpha \in (0, 1)$ y alguna constante $c(\alpha, \Gamma)$. En particular, v es continuo a través de Γ .*
2. *El potencial de doble capa w con densidad $\psi \in C(\Gamma)$ se extiende continuamente desde Ω a $\overline{\Omega}$ y desde $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$ a $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ con valores límites*

$$w_{\pm}(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial g(x|y)}{\partial \nu(y)} \psi(y) dS_y \pm \frac{1}{2} \psi(x), \quad x \in \Gamma.$$

La integral existe como integral impropia.

3. *Para el potencial de una capa v con densidad $\varphi \in C(\Gamma)$ se tiene*

$$\frac{\partial v_{\pm}}{\partial \nu}(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial g(x|y)}{\partial \nu(y)} \varphi(y) dS_y \mp \frac{1}{2} \varphi(x), \quad x \in \Gamma$$

donde nuevamente la integral existe como integral impropia y la derivada normal se entiende en el sentido de la convergencia uniforme de

$$\frac{\partial v_{\pm}}{\partial \nu}(x) := \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ a > 0}} \frac{\partial v(x + a\nu(x))}{\partial \nu(x)}.$$

4. *Para el potencial de doble capa w con densidad $\psi \in C(\Gamma)$ se tiene*

$$\frac{\partial w_+}{\partial \nu}(x) = \frac{\partial w_-}{\partial \nu}(x), \quad x \in \Gamma.$$

Con estas condiciones de salto, podemos utilizar la ecuación integral con una de las densidades consideradas (φ o ψ) para que el potencial resultante resuelva el problema de frontera exterior en consideración [12]. La conjetura

clásica para el problema exterior de Dirichlet, está en buscar la solución en la forma de potencial de doble capa, mientras que para el problema exterior de Neumann está en encontrarla como el potencial de una capa, en virtud en que las dos aproximaciones conduciría a una ecuación integral de Fredholm de primera clase [38].

Comencemos con el problema exterior de Dirichlet, y veamos que para $v(x) = h(x)$, $x \in \Gamma$ se tiene

$$h(x) = w_+(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial g(x|y)}{\partial \nu(y)} \psi(y) dS_y \pm \frac{1}{2} \psi(x), \quad x \in \Gamma \quad (2.1.23)$$

de acuerdo con el Teorema (2.1.2). De igual manera, para el problema exterior de Neumann, la condición de frontera requerida es

$$h(x) = \frac{\partial v_+}{\partial \nu}(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial g(x|y)}{\partial \nu(y)} \varphi(y) dS_y \mp \frac{1}{2} \varphi(x), \quad x \in \Gamma. \quad (2.1.24)$$

Multiplicando por dos ambas ecuaciones, obtenemos las ecuaciones integrales clásicas

$$(I + K)\psi = 2h \quad (2.1.25)$$

$$(I - K^*)\varphi = 2h, \quad (2.1.26)$$

donde los operadores integrales K y K^* son definidos por

$$(K\psi)(x) := 2 \int_{\Gamma} \frac{\partial g(x|y)}{\partial \nu(y)} \psi(y) dS_y, \quad x \in \Gamma \quad (2.1.27)$$

$$(K^*\varphi)(x) := 2 \int_{\Gamma} \frac{\partial g(x|y)}{\partial \nu(y)} \varphi(y) dS_y, \quad x \in \Gamma. \quad (2.1.28)$$

También usaremos otros dos operadores integrales definidos por

$$(S\varphi)(x) := 2 \int_{\Gamma} g(x|y) \varphi(y) dS_y, \quad x \in \Gamma \quad (2.1.29)$$

$$(T\psi)(x) := 2 \frac{\partial}{\partial \nu(x)} \int_{\Gamma} \frac{\partial g(x|y)}{\partial \nu(y)} \psi(y) dS_y, \quad x \in \Gamma. \quad (2.1.30)$$

El operador S se llama el operador de una capa, K el operador de doble capa y T se conoce como operador hiper-singular. El dominio para T es el subespacio vectorial $N(\Gamma)$ de todas las funciones $\varphi \in C(\Gamma)$ tales que el potencial de doble capa con densidad φ tenga derivada normal a ambos lados de Γ . En el siguiente teorema se resumen las propiedades de estos operadores.

Teorema 2.1.3. *Las propiedades de los operadores integrales S , K , K^* y T son las siguientes:*

1. *Los operadores S , K y K^* son compactos en $C(\Gamma)$ y $C^{0,\alpha}(\Gamma)$ para $0 < \alpha < 1$. Los tres son operadores continuos de $C(\Gamma)$ en $C^{0,\alpha}(\Gamma)$. S y K se mapean continuamente de $C^{0,\alpha}(\Gamma)$ en $C^{1,\alpha}(\Gamma)$.*
2. *S es autoadjunto, K y K^* son mutuamente adjuntos en el sistema dual definido en $C(\Gamma) \times C(\Gamma)$ con*

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_{\Gamma} \varphi \psi dS, \quad \varphi, \psi \in \Gamma.$$

3. *El operador T es autoadjunto y no acotado de $N(\Gamma)$ a $C(\Gamma)$. T es acotado de $C^{1,\alpha}(\Gamma)$ a $C^{0,\alpha}(\Gamma)$.*

Demostración. Ver [9]. □

En el problema de frontera de Robin, la condición de frontera en Γ está dada por

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + \gamma u = h \quad \text{en } \Gamma$$

con $\gamma \in C(\Gamma)$. Cuando la solución se encuentra como un potencial de una capa, la correspondiente densidad $\varphi \in C(\Gamma)$ se necesita para resolver la ecuación integral

$$\varphi - K^* \varphi - \gamma S \varphi = -2h. \quad (2.1.31)$$

El método de la ecuación integral reduce los tres problemas de valor de frontera a tres ecuaciones integrales (2.1.25), (2.1.26) y (2.1.31). Como S y K son operadores compactos, la solubilidad de estas ecuaciones integrales está completamente descrita por la alternativa de Fredholm (ver p.e., [20] o [40]), que establece, para operadores compactos adjuntos A y A^* , los operadores $I + A$ y $I + A^*$ son o ambos biyecciones o sus espacios nulos tienen la misma dimensión y sus rangos consisten de todas la funciones que son ortogonales al espacio nulo del operador adjunto. Los adjuntos de los operadores $I + K$ y $I - K^*$ aparecen en la ecuación integral para el problema exterior tanto de Dirichlet como el de Neumann. De manera más explícita, la alternativa de Fredholm en su forma más simple establece que si $K : H \rightarrow H$ es un operador compacto, donde H es un espacio de Hilbert, entonces

- i) o bien $I + K$ es invertible con inversa continua,
- ii) o $\ker(I + K)$ es finito dimensional e $\text{Im}(I + K) = \ker(I + K^*)^\perp$ tiene la misma dimensión finita.

En el segundo caso, existen funciones ψ_1, \dots, ψ_N que forman una base del complemento ortogonal de $\text{Im}(I + K)^\perp$ tal que la ecuación $\psi + K\psi = \varphi$ es soluble si y sólo si φ es ortogonal a ψ_i para todo i . Por tanto, la primera parte de la alternativa de Fredholm garantiza la existencia para las soluciones del problema exterior, siempre que tengamos la unicidad para el correspondiente problema interior.

Finalmente, citamos un teorema de representación de Green para las soluciones de la ecuación de Helmholtz.

Teorema 2.1.4. *Sea $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ una solución de la ecuación de Helmholtz*

$$\Delta u + k^2 u = 0$$

en Ω con derivada normal en $\Gamma = \partial\Omega$ en el sentido de la convergencia uniforme. Entonces

$$\int_{\Gamma} \left[u(y) \frac{\partial g(x|y)}{\partial \nu(y)} - g(x|y) \frac{\partial u}{\partial \nu(y)} \right] dS_y = \begin{cases} -u(x), & x \in \Omega; \\ 0, & x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Sea $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}) \cap C(R^2 \setminus \Omega)$ una solución de la ecuación de Helmholtz

$$\Delta u + k^2 u = 0$$

en Ω con derivada normal en $\Gamma = \partial\Omega$ en el sentido de la convergencia uniforme y satisface la condición de radiación de Sommerfeld. Entonces

$$\int_{\Gamma} \left[u(y) \frac{\partial g(x|y)}{\partial \nu(y)} - g(x|y) \frac{\partial u}{\partial \nu(y)} \right] dS_y = \begin{cases} 0, & x \in \Omega; \\ u(x), & x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Demostración. Se bosqueja en los desarrollos del apartado 2.1.2 o ver [9]. \square

En particular, el teorema de representación demuestra que cualquier solución de la ecuación de Helmholtz se puede expresar como la combinación de un potencial de una y doble capa, cada cual con una densidad diferente.

2.1.5. Problema modelo

A manera de ejemplo, consideremos el problema exterior para la ecuación de Helmholtz con respecto al disco de centro en el origen y radio a . Este problema tiene la ventaja que se puede resolver por separación de variables, y por tanto, se puede utilizar como test para aproximaciones numéricas.

El problema completo se puede escribir en coordenadas polares como

$$\begin{aligned} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + k^2u &= 0, \quad r > a \\ Bu(a, \theta) &= h(\theta) \\ \frac{\partial u}{\partial r}(R, \theta) &= (B_k u)(R, \theta), \end{aligned} \tag{2.1.32}$$

donde B es un operador diferencial en la dirección radial de orden al menos uno dependiendo de la condición de frontera impuesta en $r = a$ y B_k es un operador que se puede expresar en términos de los operadores integrales S , K , K^* y T introducidos en el apartado anterior [10]. El método de separación de variables $u(r, \theta) = F(r)G(\theta)$ nos conlleva a las funciones trigonométricas

$$G_n(\theta) = e^{in\theta}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

en la variable angular, lo cual implica que las correspondientes funciones F_n satisface

$$F''(r) + \frac{1}{r}F'(r) + \left(k^2 - \frac{n^2}{r^2}\right)F(r) = 0.$$

Claramente, esta es una ecuación de Bessel de orden n , cuyas soluciones linealmente independientes son las funciones de Hankel de orden n , $H_n^{(1)}(kr)$ y $H_n^{(2)}(kr)$, de primera y segunda clase, respectivamente. Luego la solución es de la forma

$$u(r, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} [a_n H_n^{(1)}(kr) + b_n H_n^{(2)}(kr)] e^{in\theta},$$

donde los coeficientes a_n y b_n se determinan con las condiciones de frontera. La condición de frontera DtN (aplicación Dirichlet-Neumann) en $r = R$ determina

$$\begin{aligned} u_r(R, \theta) &= k \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{H_n^{(1)'}(kR)}{H_n^{(1)}(kR)} U_n(R) e^{in\theta} \\ &= \frac{k}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{H_n^{(1)'}(kR)}{H_n^{(1)}(kR)} \int_0^{2\pi} u(R, \xi) e^{in(\theta-\xi)} d\xi \\ &:= [B_k u(R, \cdot)](\theta), \end{aligned}$$

observe que los coeficientes de Fourier están dados por

$$U_n(R) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \theta) e^{-in\theta} d\theta.$$

Nótese también que B_k es un operador en el espacio de las funciones definidas en $[0, 2\pi]$. Ahora bien, igualando coeficientes de Fourier se tiene

$$k[a_n H_n^{(1)'}(kR) + b_n H_n^{(2)'}(kR)] = k \frac{H_n^{(1)'}(kR)}{H_n^{(1)}(kR)} [a_n H_n^{(1)}(kR) + b_n H_n^{(2)}(kR)],$$

que implica $b_n = 0$ cuando usamos la relación del wronskiano (ver [32])

$$H_n^{(1)}(z)H_n^{(2)'}(z) - H_n^{(1)'}(z)H_n^{(2)}(z) = -\frac{4i}{\pi z}.$$

Por tanto, la condición de frontera DtN rechaza las soluciones entrantes sin importar la condición de frontera en el disco, ésta solamente especifica los coeficientes a_n .

Como estamos principalmente interesados en problemas de ondas planas dispersivas, consideremos entonces el dato de frontera como una onda plana incidente $u^{inc}(r, \theta) = e^{ikr \cos \theta}$ propagándose en la dirección positiva del eje x . Si la condición de frontera en el disco está dada por

$$Bu_r^{tot} \equiv u_r^{tot} + k\eta u^{tot} = 0$$

para el campo total, entonces

$$u_r + k\eta u = -u_r^{inc} - k\eta u^{inc}, \quad r = a$$

para el campo disperso u . Si ahora usamos la expansión de Jacobi-Anger [10]

$$e^{ikr \cos \theta} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} i^n J_n(kr) e^{in\theta},$$

donde J_n denota la función de Bessel, el campo disperso es entonces

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= - \sum_{n \in \mathbb{Z}} i^n \frac{J_n'(ka) + \eta J_n(ka)}{H_n^{(1)'}(ka) + \eta H_n^{(1)}(ka)} H_n^{(1)}(kr) e^{in\theta} \\ &= - \sum_{n \in \mathbb{Z}} i^n \frac{\frac{J_n'(ka)}{\eta} + J_n(ka)}{\frac{H_n^{(1)'}(ka)}{\eta} + H_n^{(1)}(ka)} H_n^{(1)}(kr) e^{in\theta} \end{aligned}$$

y cuando $\eta \rightarrow \infty$, se obtiene la solución del problema de Dirichlet

$$u(r, \theta) = - \sum_{n \in \mathbb{Z}} i^n \frac{J_n(ka)}{H_n^{(1)}(ka)} H_n^{(1)}(kr) e^{in\theta}.$$

2.2. Métodos de aproximación

En esta sección consideraremos las técnicas de aproximación como la de Wenzel-Kramers-Brillouin (WKB), la de Rytov y un método de perturbación (ver p.e., [4], [5], [27], [28] y [46]) para solucionar ecuaciones de onda no homogéneas, tomando en nuestro caso particular la solución de la ecuación no homogénea de Helmholtz. El método WKB se fundamenta en el siguiente hecho: “Si la longitud de onda de un campo de onda u es muy pequeño comparado con las variaciones en γ entonces se puede introducir una aproximación adecuada que nos de una solución apropiada”. Una idea similar se utiliza para la aproximación de Rytov. En ambos casos, el resultado está basado en el uso de una transformación tipo exponencial donde una solución de la forma $A(r)e^{is(r)}$ o más precisamente $A(r)e^{s(r)}$ es considerada, la cual es análoga a una solución de una onda plana del tipo $Ae^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$.

Los métodos de aproximación de WKB y de Rytov se basan en la idea planteada por Huygens, donde sugiere que las propiedades de la reflexión y la refracción de la luz pueden ser explicadas mediante una sucesión de frentes de onda que se extienden fuera de una función fuente como un rizo de onda que resulta del tiro de una piedra en el agua y deja cada punto del frente de onda como una nueva fuente de perturbación (ver p.e., [4]).

2.2.1. La aproximación WKB

Consideremos la ecuación diferencial

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + k^2\right)u(x) = -k^2\gamma(x)u(x) \quad (2.2.1)$$

la solución en función de Green para esta ecuación está dada por

$$u = u_{inc} + u_{scat}$$

donde u_{inc} es el campo de onda incidente y u_{scat} está dado por

$$u_{scat}(x_0) = k^2 \int \gamma(x)g(x|x_0)u(x)dx.$$

En lugar de considerar la solución como la suma de dos campos de onda u_{inc} y u_{scat} hacemos la transformación

$$u(x) = u_{inc}(x)e^{s(x)}. \quad (2.2.2)$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación (2.2.1) y derivando obtenemos

$$\frac{\partial^2 u_{inc}}{\partial x^2} + 2\frac{\partial s}{\partial x}\frac{\partial u_{inc}}{\partial x} + u_{inc}\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 + u_{inc}\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + k^2 u_{inc} = -k^2\gamma u_{inc}.$$

Si consideramos u_{inc} como una solución para

$$\frac{\partial^2 u_{inc}}{\partial x^2} + k^2 u_{inc} = 0,$$

es decir, $u_{inc} = e^{ikx}$ entonces derivando u_{inc} y agrupando términos tenemos

$$2ik \frac{\partial s}{\partial x} + \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = -k^2 \gamma. \quad (2.2.3)$$

Obsérvese que ésta es una ecuación no lineal de Riccati para s y si introducimos la condición que la longitud de onda $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ sea lo suficientemente pequeña comparada con el espacio sobre el cual varía s , entonces el término no lineal y la segunda derivada se pueden ignorar y podemos escribir

$$2ik \frac{ds}{dx} = -k^2 \gamma$$

cuya solución general (sin considerar la constante de integración) está dada por

$$s(x) = \frac{ik}{2} \int^x \gamma(v) dv.$$

Así la solución para u está dada por

$$u(x) = u_{inc} e^{\frac{ik}{2} \int^x \gamma(v) dv} = e^{ik(x + \frac{1}{2} \int^x \gamma(v) dv)},$$

y se conoce como la aproximación WKB para la ecuación de Helmholtz. Observe que esta aproximación se fundamenta en el hecho que si k es lo suficientemente grande comparado con las magnitudes de los términos

$$\left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}$$

entonces en la ecuación (2.2.3) los términos que interesan son

$$2ik \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right) \quad \text{y} \quad -k^2 \gamma.$$

En otras palabras, si L es la longitud escalar característica sobre la cual s varía entonces $\frac{\lambda}{L} \ll 1$. La solución describe un campo de onda plano cuya fase kx está modificada por $\frac{k}{2} \int \gamma dx$.

2.2.2. La aproximación de Rytov

Consideremos la ecuación tridimensional no homogénea de Helmholtz

$$(\Delta + k^2)u(r) = -k^2\gamma(r)u(r), \quad r \in V \subseteq \mathbb{R}^3. \quad (2.2.4)$$

Ahora, si sustituimos $u = u_{inc}e^s$ en la ecuación anterior y derivamos, obtenemos la siguiente ecuación no lineal de Riccati

$$\Delta s + 2\frac{\nabla u_{inc}}{u_{inc}} \cdot \nabla s + \nabla s \cdot \nabla s = -k^2\gamma \quad (2.2.5)$$

donde u_{inc} se toma de tal forma que satisfaga la siguiente ecuación

$$\Delta u_{inc} + k^2 u_{inc} = 0, \quad (2.2.6)$$

es decir, $u_{inc} = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$. Supongamos que s varía lo suficientemente lento para que el término no lineal $\nabla s \cdot \nabla s$ se desestime en relación con los otros términos, entonces de la ecuación (2.2.5) multiplicándola por u_{inc} se obtiene por aproximación, la siguiente ecuación, denominada aproximación de Rytov

$$u_{inc}\Delta s + 2\nabla u_{inc} \cdot \nabla s = -k^2\gamma u_{inc}. \quad (2.2.7)$$

Para obtener la solución en función de Green de la ecuación (2.2.7), se hace el cambio de variable $s = \frac{w}{u_{inc}}$ y al derivar se obtiene

$$\begin{aligned} u_{inc}\Delta s + 2\nabla u_{inc} \cdot \nabla s &= \Delta w + 2u_{inc}\nabla w \cdot \nabla\left(\frac{1}{u_{inc}}\right) + u_{inc}w\Delta\left(\frac{1}{u_{inc}}\right) \\ &+ 2\frac{\nabla u_{inc}}{u_{inc}} \cdot \nabla w + 2w\nabla u_{inc} \cdot \nabla\left(\frac{1}{u_{inc}}\right) \\ &= \Delta w + k^2w. \end{aligned}$$

De este modo, la ecuación (2.2.7) se reduce a

$$\Delta w + k^2w = -k^2\gamma u_{inc}. \quad (2.2.8)$$

Así, la solución en función de Green de la ecuación (2.2.8) sujeta a condiciones de frontera homogéneas es

$$w(r_0) = k^2 \int_V u_{inc}(r)\gamma(r)g(r|r_0)dr,$$

por tanto,

$$s(r_0) = \frac{k^2}{u_{inc}} \int_V u_{inc}(r)\gamma(r)g(r|r_0)dr.$$

En consecuencia, al sustituir este valor de s en (2.2.2) se obtiene

$$u(r_0) = u_{inc}(r_0) e^{\frac{k^2}{u_{inc}(r_0)} \int_V u_{inc}(r) \gamma(r) g(r|r_0) dr}.$$

Nótese que si escribimos este resultado en la forma

$$\begin{aligned} u &= u_{inc} \left(1 + \frac{k^2}{u_{inc}} \int_V u_{inc} \gamma g dr + \dots \right) \\ &\simeq u_{inc} + k^2 \int_V u_{inc} \gamma g dr, \end{aligned}$$

se obtiene una solución aproximada a la ecuación de Helmholtz, que se llama la aproximación de Born.

A continuación analizaremos bajo qué condición el método de Rytov es válido. Para ello consideremos la solución en función de Green incluyendo el término no lineal $\nabla s \cdot \nabla s$. En este caso estudiamos la ecuación (2.2.5), esto es,

$$u_{inc} \Delta s + 2 \nabla u_{inc} \cdot \nabla s = -k^2 \gamma u_{inc} - u_{inc} \nabla s \cdot \nabla s.$$

Ahora, al sustituir $s = \frac{w}{u_{inc}}$ en el primer miembro de esta ecuación obtenemos

$$\Delta w + k^2 w = -k^2 \gamma u_{inc} - u_{inc} \nabla s \cdot \nabla s$$

que tiene como solución en función de Green la siguiente expresión

$$w = k^2 \int_V u_{inc} \gamma g dr + \int_V u_{inc} (\nabla s \cdot \nabla s) g dr.$$

Luego al reemplazar $w = s u_{inc}$ se obtiene

$$s = \frac{k^2}{u_{inc}} \int_V u_{inc} \gamma g dr + \frac{k^2}{u_{inc}} \int_V u_{inc} \gamma g \left(\frac{\nabla s \cdot \nabla s}{k^2 \gamma} \right) dr$$

para que el segundo término de la anterior expresión sea desestimado debemos considerar

$$\frac{\nabla s \cdot \nabla s}{k^2 \gamma} \ll 1$$

o de manera equivalente

$$\|k^2 \gamma\| \gg \|\nabla s \cdot \nabla s\|.$$

Nótese que la aproximación de Rytov se tiene, siempre que los valores de k sean grandes, o de forma equivalente, el valor de la longitud de onda es pequeño, para una magnitud de γ y ∇s dados. Por tanto, la condición es válida si la longitud de onda del campo es pequeña comparada con γ .

2.2.3. Solución en serie de Born

En este apartado se estudiará la solución a la ecuación de Helmholtz en serie de Born, la cual también se conoce como serie de Neumann.

Consideremos la ecuación tridimensional de Helmholtz

$$(\Delta + k^2)u(r) = -k^2\gamma u(r),$$

cuya solución en función de Green está dada por

$$u(r_0) = u_{inc}(r_0) + u_{scat}(r_0)$$

donde el campo de onda u_{scat} está dado por

$$u_{scat}(r_0) = k^2 \int_V g(r|r_0)\gamma(r)u(r)dr$$

y u_{inc} es el campo de onda incidente que satisface la ecuación

$$(\Delta + k^2)u_{inc}(r) = 0$$

y g es la función de Green

$$g(r|r_0) = \frac{e^{ik|r-r_0|}}{4\pi|r-r_0|}.$$

La aproximación de Born para esta ecuación es dada al considerar $u \sim u_{inc}$, con $r \in V$ y es válida siempre que $|u_{scat}| \ll |u_{inc}|$. En consecuencia, una primera solución aproximada, digamos u_1 , es de la forma

$$u_1(r_0) = u_{inc}(r_0) + k^2 \int_V g(r|r_0)\gamma(r)u_{inc}(r)dr.$$

Ahora, una segunda aproximación u_2 , sería

$$u_2(r_0) = u_{inc}(r_0) + k^2 \int_V g(r|r_0)\gamma(r)u_1(r)dr$$

y una tercera aproximación u_3 es

$$u_3(r_0) = u_{inc}(r_0) + k^2 \int_V g(r|r_0)\gamma(r)u_2(r)dr$$

y así sucesivamente. En general, podemos considerar la iteración

$$u_{j+1}(r_0) = u_{inc}(r_0) + k^2 \int_V g(r|r_0)\gamma(r)u_j(r)dr, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

donde $u_0 = u_{inc}$.

Es interesante saber que, si la serie conformada por estas soluciones es convergente, entonces ésta converge a la solución. Veamos este hecho. Para facilitar el trabajo usemos la notación de operador y escribamos

$$u_{j+1} = u_{inc} + \hat{I}u_j$$

donde \hat{I} representa el operador integral

$$\hat{I} = k^2 \int_V dr g \gamma.$$

La solución en cada iteración es

$$\begin{aligned} u_1 &= u + \epsilon_1 \\ u_2 &= u + \epsilon_2 \\ u_3 &= u + \epsilon_3 \\ &\vdots \\ u_{j+1} &= u + \epsilon_{j+1}, \end{aligned}$$

donde u es la solución exacta y ϵ_j es el error asociado a la iteración j . Ahora veamos que $\epsilon_j \rightarrow 0$ cuando $j \rightarrow \infty$. En efecto, primero tenemos que

$$\begin{aligned} u + \epsilon_{j+1} &= u_{inc} + \hat{I}(u + \epsilon_j) \\ &= u_{inc} + \hat{I}u + \hat{I}\epsilon_j \end{aligned}$$

y por tanto podemos escribir

$$\epsilon_{j+1} = \hat{I}\epsilon_j$$

puesto que $u = u_{inc} + \hat{I}u$. Luego

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \hat{I}\epsilon_0 \\ \epsilon_2 &= \hat{I}\epsilon_1 = \hat{I}(\hat{I}\epsilon_0) = \hat{I}^2\epsilon_0 \\ \epsilon_3 &= \hat{I}\epsilon_2 = \hat{I}[\hat{I}(\hat{I}\epsilon_0)] = \hat{I}^3\epsilon_0 \\ &\vdots \\ \epsilon_j &= \hat{I}^j\epsilon_0 \end{aligned}$$

de donde

$$\|\epsilon_j\| = \|\hat{I}^j\epsilon_0\| \leq \|\hat{I}^j\| \|\epsilon_0\| \leq \|\hat{I}\|^j \|\epsilon_0\|.$$

La condición para la convergencia es por tanto

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|\hat{I}\|^j = 0,$$

pero esto sólo es posible si

$$\|\hat{I}\|^j < 1 \quad \text{o} \quad k^2 \left\| \int_V g(r|r_0) \gamma(r) dr \right\| < 1.$$

Finalmente, la solución en serie se puede escribir como

$$\begin{aligned} u(r_0) &= u_{inc}(r_0) + k^2 \int_V g(r|r_0) \gamma(r) u_{inc}(r) dr \\ &+ k^2 \int_V g(r|r_0) \gamma(r) \left[k^2 \int_V g(r_1|r) \gamma(r_1) u_{inc}(r_1) dr_1 \right] dr \\ &+ k^2 \int_V g(r|r_0) \gamma(r) \left[k^2 \int_V g(r_1|r) \gamma(r_1) \right. \\ &\times \left. \left(k^2 \int_V g(r_2|r_1) \gamma(r_2) u_{inc}(r_2) dr_2 \right) dr_1 \right] dr + \dots \\ &= u_{inc}(r_0) + k^2 \int_V dr g(r|r_0) \gamma(r) u_{inc}(r) \\ &+ k^4 \iint_V dr dr_1 g(r|r_0) \gamma(r) g(r_1|r) \gamma(r_1) u_{inc}(r_1) \\ &+ k^6 \iiint_V dr dr_1 dr_2 g(r|r_0) \gamma(r) g(r_1|r) \gamma(r_1) g(r_2|r_1) \gamma(r_2) u_{inc}(r_2) + \dots \end{aligned}$$

Esta solución en serie es una serie de Neumann para una ecuación integral de Fredholm (ver [38]), y se conoce como la serie de Born.

Otra aproximación derivada de este resultado se puede obtener al considerar el operador inverso. Esto es, sabemos que

$$u = u_{inc} + \hat{I}u,$$

de donde

$$(1 - \hat{I})u = u_{inc}$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} u &= (1 - \hat{I})^{-1} u_{inc} \\ &= (1 + \hat{I} + \hat{I}^2 + \hat{I}^3 + \dots) u_{inc}. \end{aligned}$$

2.2.4. Método de perturbación regular

Las técnicas de perturbación se usan para reemplazar ecuaciones dadas por otras más simples (ver p.e., [5] y [28]), pero con soluciones que conservan las principales características del problema original. Este método es importante en el estudio de las ecuaciones no lineales donde la perturbación es utilizada para linealizar el problema. Al usar los métodos de perturbación, la solución se puede expresar por medio de una expansión en serie que contiene un parámetro pequeño. A continuación se describirá el método y luego se aplicará para encontrar una solución aproximada de la ecuación de Helmholtz.

Consideremos la ecuación diferencial lineal o no lineal

$$L(u, \epsilon) = 0, \quad \epsilon > 0 \quad (2.2.9)$$

que depende (suavemente) del parámetro pequeño ϵ . Esta ecuación puede estar definida en una región espacial Ω acotada o no. Como también los datos en la frontera $\partial\Omega$ pueden o no depender de ϵ . El problema no perturbado o reducido asociado con la ecuación (2.2.9) se obtiene al hacer $\epsilon = 0$. Esto es, $L(u, 0) = 0$.

Expresemos ahora la solución u de (2.2.9) por medio de la serie

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \epsilon^n. \quad (2.2.10)$$

La diferencia entre u y u_0 , esto es, $u - u_0$, se llama una perturbación de la solución u_0 de la ecuación no perturbada. Reemplazando esta serie en (2.2.9) se obtiene

$$L(u, \epsilon) = L\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n \epsilon^n, \epsilon\right) = 0. \quad (2.2.11)$$

Aquí hemos supuesto que $L(u, \epsilon)$ se puede expandir en serie de potencias en u y ϵ . La serie (2.2.11) se puede expresar como

$$L(u, \epsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(u_n, u_{n-1}, \dots, u_1, u_0) \epsilon^n = 0, \quad (2.2.12)$$

donde L_n representa un operador diferencial que puede ser lineal o no, y actúa sobre las funciones u_0, u_1, \dots, u_n . La serie (2.2.10) también se reemplaza en las condiciones de frontera. Para obtener estas funciones se procede recursivamente. Esto es, se resuelve primero la ecuación reducida $L_0(u_0) = 0$. Luego con u_0 especificada, se obtiene u_1 , al resolver $L_1(u_1, u_0) = 0$, y continuando de esta manera se obtiene u_2, u_3, \dots .

Consideremos ahora la ecuación de Helmholtz perturbada

$$\Delta u + \epsilon^2 u = 0 \quad \text{en } \Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\} \quad (2.2.13)$$

$$u = 1 \quad \text{en } \partial\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}. \quad (2.2.14)$$

El parámetro ϵ^2 es pequeño, tal que la solución de la ecuación con la condición dada sea única.

Para resolver esta ecuación, introducimos la serie perturbada

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, y) \epsilon^{2n}, \quad (2.2.15)$$

donde la expansión es en serie de potencias de ϵ^2 . Insertando (2.2.15) en la ecuación (2.2.13) y en la condición de frontera (2.2.14) obtenemos

$$\begin{aligned} \Delta u + \epsilon^2 u &= \Delta \left[\sum_{n=0}^{\infty} u_n \epsilon^{2n} \right] + \sum_{n=0}^{\infty} u_n \epsilon^{2n+2} \\ &= \Delta u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\Delta u_n + u_{n-1} \right] \epsilon^{2n}, \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

$$u(x, y) = u_0(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y) \epsilon^{2n} = 1, \quad \text{en } \partial\Omega. \quad (2.2.17)$$

Al igualar potencias de ϵ^2 a cero en (2.2.16) y a 1 o cero en (2.2.17) se obtiene

$$\Delta u_0 = 0, \quad \Delta u_n = u_{n-1}, \quad n \geq 1$$

y las condiciones de frontera

$$u_0(x, y) = 1, \quad u_n(x, y) = 0, \quad n \geq 1, \quad x^2 + y^2 = 1. \quad (2.2.18)$$

Observe que el método de perturbación reemplazó la ecuación de Helmholtz por el sistema de ecuaciones de Laplace y Poisson. Las ecuaciones para u_n se resuelven recursivamente empezando con la ecuación de Laplace $\Delta u_0 = 0$ y usando las condiciones de frontera (2.2.18). Para ello se introducen coordenadas polares r y θ tanto en la ecuación de Helmholtz como en la de Laplace y Poisson, y las soluciones son independientes de θ ya que el problema no tiene dependencia angular.

Sea entonces $u = u(r)$, la ecuación (2.2.13) se transforma en

$$u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \epsilon^2 u = 0 \quad (2.2.19)$$

esta ecuación es justamente una ecuación de Bessel de orden cero. La solución es acotada en $r = 0$ y satisface la condición de frontera $u(1) = 1$. Así,

$$u = \frac{J_0(\epsilon r)}{J_0(\epsilon)},$$

donde $J_0(\cdot)$ es la función de Bessel de orden cero (ver p.e, [50]).

Al resolver para u_n , nuevamente suponemos $u_n = u_n(r)$ y obtenemos para $u_0(r)$

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_0}{\partial r} = 0, \quad u_0(1) = 1.$$

La solución acotada de este problema de frontera es $u_0 = 1$. Ahora, la ecuación para $u_1(r)$ es

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial r} = -u_0 = -1, \quad u_1(1) = 0,$$

al integrar se obtiene la solución acotada

$$u_1 = \frac{1 - r^2}{4}.$$

Continuando de esta forma se obtienen u_2, u_3, \dots , y al sustituir en la serie (2.2.15) se tiene

$$u = 1 + \frac{1 - r^2}{4} \epsilon^2 + O(\epsilon^4).$$

Por otro lado, $J_0(x)$ tiene la expansión en serie

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + O(x^2),$$

de donde

$$\begin{aligned} \frac{J_0(\epsilon r)}{J_0(\epsilon)} &= \frac{1 - \frac{(\epsilon r)^2}{4} + O(\epsilon^4)}{1 - \frac{\epsilon^2}{4} + O(\epsilon^4)} \\ &= 1 + \frac{1 - r^2}{4} \epsilon^2 + O(\epsilon^4). \end{aligned}$$

Esta serie converge para ϵ suficientemente pequeño. Es más, ϵ debe ser más pequeño que el primer cero de $J_0(x)$, el cual se presenta en $x \approx 2.4$.

CAPÍTULO 3

Formulación variacional para la ecuación de Helmholtz

El método de los elementos finitos está basado en la formulación variacional o débil del problema exterior para la ecuación de Helmholtz, y por tanto, necesitamos introducir funciones que posean propiedades de diferenciabilidad más generales que la usual, es decir, debemos introducir las derivadas en el sentido de las distribuciones (ver preliminares) y conocer algunos resultados básicos sobre espacios de Sobolev, esto lo haremos siguiendo [2], [20], [21], [23], [33], [34], [39], [40] y [47]. Comenzaremos este capítulo introduciendo algunos resultados sobre soluciones débiles que utilizaremos en el método de los elementos finitos y en la formulación del problema variacional para la ecuación de Helmholtz.

3.1. Extensión a soluciones débiles

Para nuestro propósito, las soluciones débiles se buscan en un espacio de funciones con energía finita (ciertos espacios de Sobolev). En el problema exterior de la ecuación de Helmholtz, este espacio usualmente se define por

$$W(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}) := \left\{ u \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}) : u_r - iku = o(r^{-1/2}), \ r \rightarrow \infty \right\}.$$

Como estamos considerando la ecuación de Helmholtz con coeficientes constantes, la teoría de regularidad para problemas de valor de frontera elípticos [23] garantiza que las soluciones de la ecuación de Helmholtz son analíticas fuera del disco que contiene al obstáculo. Por tanto, la condición

de radiación (2.1.3) también es válida. Antes de continuar con el tema, introduzcamos un poco de terminología que usaremos en este capítulo.

Considere el problema de Dirichlet para la ecuación de Poisson

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{en } \Omega \subset \mathbb{R}^3 \\ u &= 0 \quad \text{en } \Gamma. \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

Para $f \in C(\Omega)$, la solución clásica de esta ecuación pertenece a $C^2(\Omega)$ y se anula en Γ . Ahora, multiplicando la ecuación (3.1.1) por una función arbitraria φ con soporte compacto en Ω ($\varphi = 0$ en Γ), e integrando el resultado se obtiene

$$-\int_{\Omega} \varphi \Delta u d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \varphi f d\mathbf{x}. \quad (3.1.2)$$

Al utilizar la identidad (1.2.7) en el lado izquierdo de la ecuación anterior se tiene (recuerde que $\varphi = 0$ en Γ)

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \varphi f d\mathbf{x}, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \quad (3.1.3)$$

Si $f \in C(\Omega)$, la ecuación (3.1.1) no debe tener solución en el sentido clásico (es decir, $u \notin C^2(\Omega)$). Para tal caso es necesario generalizar el concepto de solución de manera apropiada. Observe que para $f \in L_2(\Omega)$, la ecuación (3.1.3) tiene sentido si $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ está en $L_2(\Omega)$. Si $u \in H_0^1(\Omega)$ y si las derivadas son consideradas en el sentido de las distribuciones, se sigue de la definición de los espacios de Sobolev que $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L_2(\Omega)$. Entonces $u \in H_0^1(\Omega)$ es una *solución débil o generalizada* de la ecuación (3.1.1) si, para $f \in L_2(\Omega)$, u satisface la ecuación (3.1.1). En otras palabras, una solución generalizada de la ecuación (3.1.1) es una distribución $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que la ecuación (3.1.2) o equivalentemente, (3.1.3), se satisface para cada $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ y para una distribución f en $L_2(\Omega)$ dada.

Recuerde que $C_0^\infty(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)$ es un subespacio denso de $H_0^1(\Omega)$ (puesto que $H_0^1(\Omega)$ es la clausura de $C_0^\infty(\Omega)$). Por tanto, la ecuación (3.1.3) es equivalente a encontrar $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$(\nabla u, \nabla \varphi)_2 = (f, \varphi)_2, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

donde $(\cdot, \cdot)_2$ es el producto interno en $L_2(\Omega)$. Esta última ecuación tiene sentido cuando φ es cualquier elemento de $H_0^1(\Omega)$, es decir, la última ecuación es equivalente a

$$(\nabla u, \nabla \varphi)_2 = (f, \varphi)_2, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \quad (3.1.4)$$

Esta ecuación se llama *formulación variacional o débil* del problema (3.1.1).

En general, la formulación débil de un problema de frontera se expresa así: encontrar una función u en un espacio de Hilbert V , que satisface la ecuación

$$a(u, v) = \langle \ell, v \rangle, \quad \forall v \in V, \quad (3.1.5)$$

donde $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ es una forma bilineal y $\ell : V \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional lineal. En el caso que se discutió para la ecuación de Poisson, se tiene $V = H_0^1(\Omega)$,

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy \quad (3.1.6)$$

y

$$\langle \ell, v \rangle = \int_{\Omega} f v dx dy.$$

Terminemos esta sección enunciando el Lema de Lax-Milgram y dos resultados clásicos sobre regularidad para la ecuación de Helmholtz con las propiedades de los operadores S , K , K^* y T extendidos a espacios de Sobolev. Recuerde que estos operadores fueron definidos en el apartado 2.1.4.

Teorema 3.1.1. (Lema de Lax-Milgram) *Supongamos que V es un espacio de Hilbert, $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal acotada y V -elíptica, ℓ un funcional lineal. Entonces el problema*

$$u \in V, \quad a(u, v) = \langle \ell, v \rangle, \quad \forall v \in V, \quad (3.1.7)$$

tiene solución única.

Demostración. Véase [20]. □

Nota 3.1.1. Una forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ es V -elíptica, si

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|_V^2$$

para todo $u \in V$ y para alguna constante $\alpha > 0$.

El siguiente teorema de regularidad para problemas de valor de frontera, se enunciará y su prueba se puede consultar en [24].

Teorema 3.1.2. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ una región acotada con frontera Γ de clase C^2 , $h \in H^{1/2}(\Gamma)$, $\gamma \in L_{\infty}(\Gamma)$ y $h_1 \in H^{-1/2}(\Gamma)$. Entonces los tres problemas exteriores de frontera para la ecuación de Helmholtz*

$$\Delta u + k^2 u = 0$$

en el dominio $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$ con una de las tres condiciones de frontera

$$\begin{aligned} u &= h \quad \text{en } \Gamma, & (\text{problema de Dirichlet}) \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= h_1 \quad \text{en } \Gamma, & (\text{problema de Neumann}) \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} - \eta u &= h_1 \quad \text{en } \Gamma, & (\text{problema de Robin}) \end{aligned}$$

admiten soluciones únicas $u \in W(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega})$. Si el dato posee la regularidad adicional $h \in H^{3/2}(\Gamma)$ o $h_1 \in H^{1/2}(\Gamma)$, entonces las soluciones también están en el espacio $H_{loc}^2(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega})$.

El teorema anterior se deriva del siguiente resultado, el cual describe las propiedades de los operadores integral y potencial en espacios de Sobolev, su prueba se encuentra en [30].

Teorema 3.1.3. *Supongamos que la frontera Γ es de clase C^∞ . Entonces los siguientes enunciados se tienen.*

1. *Los operadores S , K , K^* y T se pueden extender a operadores acotados entre*

$$S, K, K^* : H^s(\Gamma) \rightarrow H^{p+1}(\Gamma) \quad \forall p \in \mathbb{R}$$

$$T : H^{p+1}(\Gamma) \rightarrow H^p(\Gamma) \quad \forall p \in \mathbb{R}.$$

2. *Los operadores potenciales \tilde{S} y \tilde{K} dados por*

$$\varphi \mapsto \tilde{S}\varphi = \int_{\Gamma} g(\cdot|y)\varphi(y)dS_y$$

y

$$\psi \mapsto \tilde{K}\psi = \int_{\Gamma} \frac{\partial g(\cdot|y)}{\partial \nu(y)} \psi(y)dS_y$$

se pueden extender a operadores continuos entre

$$\tilde{S} : H^p(\Gamma) \rightarrow H^{p+3/2}(\Omega) \quad (\text{resp. } H_{loc}^{p+3/2}(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}))$$

$$\tilde{K} : H^p(\Gamma) \rightarrow H^{p+1/2}(\Omega) \quad (\text{resp. } H_{loc}^{p+1/2}(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}))$$

para todo $p \in \mathbb{R}$.

3.2. La formulación variacional

En esta sección se estudiará la formulación variacional para la ecuación de Helmholtz, con el propósito de aplicarla en el método de los elementos finitos en la solución del problema exterior de Dirichlet

$$\begin{aligned}\Delta u + k^2 u &= 0 & \text{en } \Omega \\ u &= h & \text{en } \Gamma \\ \frac{\partial u}{\partial r} &= B_k u, & \text{en } \Gamma_R\end{aligned}\tag{3.2.1}$$

donde el dominio Ω está acotado internamente por la frontera del obstáculo Γ y externamente por la frontera artificial circular Γ_R sobre la cual se impone la condición de frontera DtN (Dirichlet-Neumann), Figura 3.1.1.

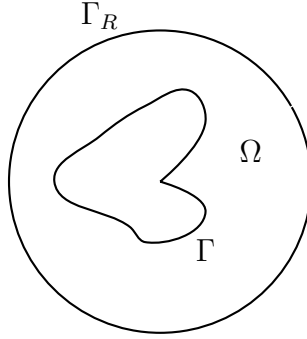


Figura 3.2.1

Comencemos estudiando dos problemas particulares para la ecuación de Helmholtz modificada.

Consideremos el problema de Neumann

$$\begin{aligned}-\Delta u + u &= f & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= g & \text{en } \Gamma.\end{aligned}\tag{3.2.2}$$

Acá f y g son funciones en Ω y Γ , respectivamente. Recuerde que $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ es la derivada normal en Γ . La formulación débil para este problema se obtiene multiplicando la ecuación por una función arbitraria $v \in C^\infty(\Omega)$ e integrando por partes sobre Ω se tiene

$$\int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + uv) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f v d\mathbf{x} + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} v dS.$$

Por tanto, sustituyendo la condición de Neumann en la integral de frontera se llega a la relación

$$\int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + uv) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f v d\mathbf{x} + \int_{\Gamma} g v dS.$$

Ahora bien, supongamos $f \in L_2(\Omega)$ y $g \in L_2(\Gamma)$, entonces, para que cada término de esta última expresión tenga sentido, debemos escoger como espacio a $H^1(\Omega)$ tanto para la función de ensayo u , como para la función de prueba v ($v \in C^\infty(\Omega) \Rightarrow v \in H^1(\Omega)$ pues $C^\infty(\Omega)$ es denso en $H^1(\Omega)$). En consecuencia, la formulación variacional es:

Encontrar $u \in H^1(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + uv) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f v d\mathbf{x} + \int_{\Gamma} g v dS \quad \forall v \in H^1(\Omega). \quad (3.2.3)$$

Este problema tiene la forma (3.1.7), donde $V = H^1(\Omega)$, $a(\cdot, \cdot)$ y $\langle \ell, \cdot \rangle$ son definidos por

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + uv) d\mathbf{x} \\ \langle \ell, v \rangle &= \int_{\Omega} f v d\mathbf{x} + \int_{\Gamma} g v dS, \end{aligned}$$

respectivamente. Aplicando el Lema de Lax-Milgram, la formulación débil (3.2.3) tiene una única solución $u \in H^1(\Omega)$.

En muchos problemas de aplicación, es posible especificar diferentes clases de condiciones de frontera en distintas porciones de la frontera. Uno de tales ejemplos es

$$\begin{aligned} -\Delta u + u &= f & \text{en } \Omega \\ u &= 0 & \text{en } \Gamma_D \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= g & \text{en } \Gamma_N, \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

donde Γ_D y Γ_N no se traslapan, es decir, $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ y $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$, con Γ_D relativamente cerrado, Γ_N relativamente abierto y Ω conexo. Ahora, el espacio apropiado para la formulación débil de este problema es

$$V = H_{\Gamma_D}^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\Gamma_D} = 0\}.$$

Entonces la formulación variacional es ahora:

Encontrar $u \in V$ tal que

$$\underbrace{\int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + uv) d\mathbf{x}}_{a(u, v)} = \underbrace{\int_{\Omega} f v d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_N} g v dS}_{\langle \ell, v \rangle} \quad \forall v \in V. \quad (3.2.5)$$

Bajo hipótesis apropiadas, digamos $f \in L_2(\Omega)$ y $g \in L_2(\Gamma_N)$, podemos aplicar el Lema de Lax-Milgram para concluir que el problema débil tiene solución única.

Para continuar con el propósito de esta sección, presentemos la formulación variacional del problema (3.2.1). Para ello, multiplicamos la ecuación de Helmholtz por la función suave v y aplicamos la identidad (1.2.7) para obtener

$$\int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v - k^2 uv) d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_R \setminus \Gamma} v \frac{\partial u}{\partial \nu} dS = 0. \quad (3.2.6)$$

Ahora introducimos los espacios

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &:= \{u \in H^1(\Omega) : u|_{\Gamma} = h\} \\ \mathcal{V} &:= \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\Gamma} = 0\}, \end{aligned}$$

donde $H^1(\Omega)$ es el espacio de Sobolev usual (ver preliminares) y la restricción en la frontera entendida en el sentido del operador traza. Si suponemos que $v \in \mathcal{V}$ en (3.2.6), la integral sobre Γ se anula. Además, como la solución u debe satisfacer la condición de frontera DtN en Γ_R , podemos reemplazar su derivada normal por $B_k u$. La imagen de una función $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma_R)$ bajo el operador B_k de la condición DtN para el caso donde Γ_R es un círculo de radio R y centro en el origen, se puede escribir como la serie de Fourier

$$(B_k \varphi)(\theta) = k \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{H_n^{(1)'}(kR)}{H_n^{(1)}(kR)} \varphi_n e^{in\theta}, \quad \varphi \in H^{1/2}(\Gamma_R)$$

con coeficientes de Fourier

$$\varphi_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) e^{-in\theta} d\theta, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

La formulación variacional del problema (3.2.1) es por tanto:

$$\text{encontrar } u \in \mathcal{S} \text{ tal que } a(u, v) = 0 \text{ para cada } v \in \mathcal{V},$$

donde la forma bilineal $a(\cdot, \cdot) : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ está definida como

$$a(u, v) := \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v - k^2 uv) d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_R} v B_k u dS.$$

Observe que el primer término en la forma bilineal es autoadjunto, mientras el término en la integral de frontera es sólo simétrico, esto es, si $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma_R}$ denota

el par dual entre $H^{-1/2}(\Gamma_R)$ y $H^{1/2}(\Gamma_R)$ considerado como una extensión del producto interno en $L_2(\Gamma_R)$, se tiene

$$\begin{aligned}
 \langle B_k \varphi, \psi \rangle_{\Gamma_R} &= \int_{\Gamma_R} \bar{\psi} B_k \varphi dS \\
 &= R \int_0^{2\pi} \left(k \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{H_n^{(1)'}(kR)}{H_n^{(1)}(kR)} \varphi_n e^{in\theta} \right) \overline{\psi(\theta)} d\theta \\
 &= R \int_0^{2\pi} \left(k \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{H_n^{(1)'}(kR)}{H_n^{(1)}(kR)} \overline{\psi_n} e^{-in\xi} \right) \varphi(\xi) d\xi \\
 &= \langle B_k \bar{\psi}, \bar{\varphi} \rangle_{\Gamma_R}.
 \end{aligned}$$

Ahora consideraremos algunas propiedades importantes del operador DtN. En la prueba de la siguiente proposición, necesitamos la caracterización del espacio dual $H^{-m}(\Gamma_R)$ de $H^m(\Gamma_R)$, para $m \geq 0$. Como la frontera artificial Γ_R es un círculo, podemos escribir cada $h \in L_2(\Gamma_R)$ como una serie de Fourier

$$h(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n e^{in\theta}$$

con coeficientes de Fourier h_n . La norma de h en $H^m(\Gamma_R)$ es dada por

$$\|h\|_{m, \Gamma_R} = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} (1 + n^2)^m |h_n|^2 \right)^{1/2}.$$

Un funcional f en $H^m(\Gamma_R)$, está en el dual $H^{-m}(\Gamma_R)$ si y sólo si, su norma

$$\|f\|_{-m, \Gamma_R} = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} (1 + n^2)^{-m} |f_n|^2 \right)^{1/2} < \infty.$$

Acá f_n es el valor del funcional f aplicado al monomio trigonométrico $\tau_n(\theta) := e^{in\theta}$. Recíprocamente, para toda sucesión de números complejos $(z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ que satisface $\sum_{n \in \mathbb{Z}} (1 + n^2)^{-m} |z_n|^2 < \infty$, existe $w \in H^{-m}(\Gamma_R)$ con $w(\tau_n) = z_n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Proposición 3.2.1. *Para todo entero no negativo m , el operador de frontera $DtN B_k : H^{m+1/2}(\Gamma_R) \rightarrow H^{m-1/2}(\Gamma_R)$ es un operador lineal acotado, esto es,*

$$B_k \in \mathcal{L}(H^{m+1/2}(\Gamma_R), H^{m-1/2}(\Gamma_R)).$$

Demostración. Primero considere el caso $m = 0$. Dado $h \in H^{1/2}(\Gamma_R)$, debemos probar que su imagen $f := B_k h$ está en $H^{-1/2}(\Gamma_R)$. Por la definición de B_k se tiene

$$f(\theta) = k \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \frac{H_n^{(1)'}(kR)}{H_n^{(1)}(kR)} e^{in\theta}.$$

Como

$$f_n = f(e^{in\theta}) = k h_n \frac{H_n^{(1)'}(kR)}{H_n^{(1)}(kR)},$$

tenemos

$$\begin{aligned} \|B_k h\|_{\frac{1}{2}, \Gamma_R}^2 &= \|f\|_{\frac{1}{2}, \Gamma_R}^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{|f_n|^2}{(1+n^2)^{1/2}} \\ &= |k|^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \frac{H_n^{(1)'}(kR)}{H_n^{(1)}(kR)} \right|^2 \frac{|h_n|^2}{(1+n^2)^{1/2}} \\ &= |k|^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} (1+n^2)^{1/2} |h_n|^2 \left| \frac{H_n^{(1)'}(kR)}{H_n^{(1)}(kR)} \right|^2 \frac{1}{1+n^2} \\ &\leq C_B^2 |k|^2 \|h\|_{\frac{1}{2}, \Gamma_R}^2, \end{aligned}$$

la prueba termina si demostramos que existe C_B tal que

$$\left| \frac{H_n^{(1)'}(kR)}{H_n^{(1)}(kR)} \right|^2 \frac{1}{1+n^2} \leq C_B^2, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

En efecto, hagamos uso de la siguiente fórmula asintótica para $H^{(1)}$ (función de Hankel) para n suficientemente grande (ver [32])

$$H_n^{(1)}(z) = -i \sqrt{\frac{2}{n\pi}} \left(\frac{2n}{ez} \right)^n \left[1 + O(1/n) \right], \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty$$

como también de la fórmula de recurrencia

$$H_n^{(1)'}(z) = \frac{1}{2} [H_{n-1}^{(1)}(z) - H_{n+1}^{(1)}(z)], \quad n \geq 1.$$

Por esta última ecuación, la expresión que deseamos acotar se convierte

$$\frac{H_n^{(1)'}(kR)}{H_n^{(1)}(kR)} = \frac{1}{2} \left[\frac{H_{n-1}^{(1)}(kR)}{H_n^{(1)}(kR)} - \frac{H_{n+1}^{(1)}(kR)}{H_n^{(1)}(kR)} \right].$$

Para el primer término, obtenemos

$$\frac{H_{n-1}^{(1)}(kR)}{H_n^{(1)}(kR)} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} \left(\frac{ekr}{2n}\right) [1 + O(1/n)] \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

puesto que todos los términos están acotados y el tercer término tiende a cero cuando $n \rightarrow \infty$. Para el segundo término tenemos

$$\frac{H_{n+1}^{(1)}(kR)}{H_n^{(1)}(kR)} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(\frac{2(n+1)}{ekr}\right) [1 + O(1/n)] = O(n), \quad n \rightarrow \infty$$

ya que, en este caso, todos los términos están acotados excepto el tercero que es $O(n)$. En consecuencia,

$$\left| \frac{H_n^{(1)'}(kR)}{H_n^{(1)}(kR)} \right|^2 \frac{1}{1+n^2} = O(n^2) \frac{1}{1+n^2} = O(1), \quad n \rightarrow \infty$$

y esto asegura la existencia de la cota deseada C_B . La misma prueba funciona también para cualquier $m \in \mathbb{N}$. \square

El resultado anterior implica la continuidad de la forma bilineal $a(u, v)$.

Corolario 3.2.2. *Existe una constante $C_b > 0$ tal que*

$$|a(u, v)| \leq C_b \|u\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega}, \quad \forall u, v \in H^1(\Omega).$$

Demostración. Al aplicar sucesivamente, la desigualdad de Schwarz, el acotamiento de B_k y el teorema de la traza, se tiene

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &= \left| \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v - k^2 uv) d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_R} v B_k u dS \right| \\ &\leq \left| \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\mathbf{x} \right| + \left| \int_{\Omega} k^2 uv d\mathbf{x} \right| + \left| \int_{\Gamma_R} v B_k u dS \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left| \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L_2} \right| + k^2 (|u||v|)_{L_2} + \|B_k u\|_{-\frac{1}{2}, \Gamma_R} \|v\|_{\frac{1}{2}, \Gamma_R} \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L_2} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L_2} + k^2 \|u\|_{L_2} \|v\|_{L_2} + C_B C_{traza} \|u\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega} \\ &\leq (1 + k^2) \|u\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega} + C_B C_{traza} \|u\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega} \\ &\leq C_b \|u\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega}, \quad \forall u, v \in H^1(\Omega). \end{aligned}$$

donde $C_b = 1 + k^2 + C_B C_{traza}$. Así, se obtiene el resultado. \square

Proposición 3.2.3. *El operador DtN para un número onda imaginario puro $k = i$ es definido negativo en $H^{1/2}(\Gamma_R)$, es decir,*

$$\langle -B_i \psi, \psi \rangle_{\Gamma_R} \geq 0, \quad \forall \psi \in H^{1/2}(\Gamma_R).$$

Demostración. Para cualquier $\psi \in H^{1/2}(\Gamma_R)$ tenemos

$$\begin{aligned} \langle -B_i \psi, \psi \rangle_{\Gamma_R} &= -i \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\psi|^2 \frac{H_n^{(1)'}(iR)}{H_n^{(1)}(iR)} \\ &= - \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\psi|^2 \frac{K_n'(R)}{K_n(R)} \geq 0. \end{aligned}$$

La primera igualdad se tiene de la identidad

$$H_n^{(1)}(iz) = \frac{2}{\pi i} e^{n\pi i/2} K_n(z), \quad -\pi < \arg z < \pi/2,$$

donde K_n es la función de Bessel modificada de tercera clase y de orden n [32]. La desigualdad se sigue del hecho que $K_n(R) > 0$, $K_n'(R) < 0$ para $R > 0$, lo cual se puede deducir de la representación integral

$$K_n(z) = \int_0^\infty e^{-z \cosh t} \cosh n t dt$$

válida para $\operatorname{Re}(z) > 0$. □

El resultado anterior implica que la forma bilineal $a_i(\cdot, \cdot)$ para $k = i$ es $H^1(\Omega)$ –elíptica. En efecto,

$$\begin{aligned} a_i(u, u) &= \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + |u|^2) d\mathbf{x} - \langle B_i u, u \rangle_{\Gamma_R} \\ &= \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + |u|^2) d\mathbf{x} + \langle -B_i u, u \rangle_{\Gamma_R} \\ &\geq \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + |u|^2) d\mathbf{x} = \|u\|_{1,\Omega}^2. \end{aligned}$$

Consideremos ahora el problema de frontera

$$\begin{aligned} \Delta u + k^2 u &= f && \text{en } \Omega \\ u &= g && \text{en } \Gamma \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} - B_k u &= h && \text{en } \Gamma_R, \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

acá f , g y h son funciones en Ω , Γ y Γ_R , respectivamente. El siguiente teorema da condiciones que garantizan la unicidad del problema (3.2.7).

Teorema 3.2.4. *Supongamos que $f \in L_2(\Omega)$, $g \in H^{3/2}(\Gamma)$ y $h \in H^{1/2}(\Gamma_R)$. Si Γ es suficientemente regular (es decir, es de clase C^1), entonces el problema (3.2.7) tiene solución única. Además, para $u \in H^2(\Omega)$ se tiene*

$$\|u\|_{2,\Omega} \leq C(\|f\|_{0,\Omega} + \|g\|_{\frac{3}{2},\Gamma} + \|h\|_{\frac{1}{2},\Gamma_R})$$

para alguna constante $C > 0$.

Demostración. Comencemos encontrando una función $u_1 \in H^2(\Omega)$ tal que

$$\Delta u_1 + k^2 u_1 = f, \quad \text{en } \Omega.$$

Como no hay condiciones de frontera impuestas a u_1 , entonces se puede usar la transformada de Fourier para encontrar u_1 . Definamos

$$h_1 := \frac{\partial u_1}{\partial r} - B_k u_1 \in H^{1/2}(\Gamma_R)$$

y supongamos que w es solución del problema

$$\begin{aligned} \Delta w + k^2 w &= 0 & \text{en } \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma_R \\ \left[\frac{\partial w}{\partial r} \right]_{\Gamma_R} &= h - h_1 \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

donde $[v]_{\Gamma_R}$ denota el salto $v^- - v^+$ de la función v a través de Γ_R cuando se mueve de adentro hacia afuera. Este problema se puede resolver usando el método de la ecuación integral o potenciales de capa (ver apartado 2.1.4). Expresemos a w como el potencial de una capa

$$w(x) = \tilde{S}(h - h_1)(x) = 2 \int_{\Gamma_R} [h(y) - h_1(y)] \phi(x, y) dS_y$$

con intensidad $h - h_1$. Las propiedades del operador \tilde{S} aseguran que w está en $H^2(\text{int}(\Gamma_R))$ y en $H_{loc}^2(\text{ext}(\Gamma_R))$, respectivamente, y la condición de salto implica que w es solución del problema (3.2.8).

Nuevamente, definamos $u_2 := w|_{\Omega}$ y verifica

$$\frac{\partial u_2}{\partial r} - B_k u_2 = h - h_1, \quad \text{en } \Gamma_R.$$

Para ver esto, nótese que el operador de frontera DtN B_k aplica $u_2|_{\Gamma_R}$ a la derivada normal en Γ_R de la solución del problema exterior de Dirichlet con dato $u_2|_{\Gamma_R}$. Esta derivada normal es justamente $\frac{\partial w^+}{\partial r}$, dando

$$\frac{\partial u_2}{\partial r} - B_k u_2 = \frac{\partial w^-}{\partial r} - \frac{\partial w^+}{\partial r} = h - h_1.$$

Finalmente, definamos u_3 como solución de problema

$$\begin{aligned} \Delta u_3 + k^2 u_3 &= 0 & \text{en } \Omega \\ u_3 &= g - u_1|_{\Gamma} - u_2|_{\Gamma} & \text{en } \Gamma \\ \frac{\partial u_3}{\partial r} - B_k u_3 &= 0 & \text{en } \Gamma_R. \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

Las propiedades de regularidad de las soluciones del problema exterior (3.2.9) (ver Teorema 3.1.2) implica que $u_3 \in H^2(\Omega)$ y, poniendo $u := u_1 + u_2 + u_3$, obtenemos una solución del problema (3.2.7). La continuidad con respecto a los datos se sigue de los teoremas estándar de regularidad (ver p.e., [2], [20] o [39]) o del hecho que todos los operadores involucrados son acotados. La unicidad se obtiene como consecuencia que la solución de la contraparte homogénea del problema (3.2.7) se puede extender a una solución del problema exterior homogéneo de Dirichlet, implicando que ésta debe anularse idénticamente. \square

3.3. El método de Galerkin

Empezaremos discutiendo el método de Galerkin para ecuaciones con operadores lineales en una forma directamente aplicable al estudio del método de elementos finitos. También se analizará la convergencia de dicho método. El método de Galerkin provee una técnica general para la aproximación de ecuaciones con operadores, entre éstas se encuentra el método de los elementos finitos como caso especial.

Sea V un espacio de Hilbert, $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal y ℓ un funcional lineal. Consideremos el problema

$$u \in V, \quad a(u, v) = \langle \ell, v \rangle \quad \forall v \in V. \quad (3.3.1)$$

Se supone además que $a(\cdot, \cdot)$ es acotada, es decir, existe una constante $C > 0$ tal que

$$|a(u, v)| \leq C \|u\|_V \|v\|_V, \quad \forall u, v \in V,$$

y V -elíptica,

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|^2, \quad \forall u \in V.$$

De acuerdo al Lema de Lax-Milgram, el problema variacional (3.3.1) tiene solución única.

En general, es imposible encontrar la solución exacta del problema (3.3.1) porque el espacio V es infinito dimensional. Una manera natural de resolver el problema, es construir una solución aproximada en un espacio

finito dimensional. Sea entonces, $V_N \subset V$ un subespacio N -dimensional. Proyectamos el problema (3.3.1) sobre V_N ,

$$u_N \in V_N, \quad a(u_N, v) = \langle \ell, v \rangle \quad \forall v \in V_N. \quad (3.3.2)$$

Bajo las suposiciones que la forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ es acotada, V -elíptica y $\ell \in V'$ (el dual), podemos aplicar nuevamente el Lema Lax-Milgram y concluir que el problema (3.3.2) tiene solución única u_N .

Expresemos el problema (3.3.2) en la forma de un sistema lineal de N ecuaciones algebraicas con N incógnitas. Esto es, sea $\{w_j\}_{j=1}^N$ una base del espacio finito dimensional V_N tal que

$$u_N = \sum_{j=1}^N c_j w_j, \quad c_j \in \mathbb{R}.$$

De hecho, existen una infinidad de bases posibles y el hacer una selección adecuada de una de ellas es el objetivo de la metodología de elementos finitos [26] y [27]. Ahora, para determinar u_N basta calcular $c_j \in \mathbb{R}$ de manera que,

$$a\left(\sum_{j=1}^N c_j w_j, w_i\right) = \ell(w_i), \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

En consecuencia, el problema (3.3.2) es equivalente al sistema lineal

$$K \mathbf{w} = \mathbf{b}, \quad (3.3.3)$$

donde la matriz $K = [a(w_j, w_i)] \in \mathbb{R}^{N \times N}$ se denomina matriz de rigidez, el vector $\mathbf{b} = (\ell(w_i)) \in \mathbb{R}^N$ se llama vector de carga y el vector $\mathbf{c} = (c_j) \in \mathbb{R}^N$ es el vector incógnita. Así, la solución del problema (3.3.2) se encuentra resolviendo el sistema (3.3.3).

La solución aproximada u_N es, en general, diferente de la solución exacta u . Al incrementar la precisión, es natural buscar la solución aproximada u_N en un subespacio más grande V_N . Por tanto, para una sucesión de subespacios $V_{N_1} \subset V_{N_2} \subset \dots \subset V$, calculamos una sucesión de soluciones aproximadas $u_{N_i} \in V_{N_i}$, $i = 1, 2, \dots$. La solución obtenida de esta forma se llama *método de Galerkin*. Además, $u_N \in V_N$ es tal que,

- a) $J_1(u_N) \leq J_1(u)$ para todo $u \in V_N$, es decir, u_N es el elemento minimizador de J_1 en V_N , donde $J_1(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - \ell(v)$ es el funcional de energía.
- b) Es la proyección sobre V_N de la solución exacta $u \in V$, esto es, $u_N = \text{Proy}_{V_N} u$. Es decir, el error $e_N = u_N - u$ es ortogonal, en la métrica de V , a V_N .

c) Convergencia: $J_1(u_N) \rightarrow J_1(u)$ cuando $N \rightarrow \infty$, es decir, $u_N \rightarrow u$ en V .

En efecto, para verificar a) basta considerar

$$\begin{aligned} J_1(u_N) &= \frac{1}{2}a(u_N, u_N) - \ell(u_N) \\ &= \frac{1}{2}a(u_N, u_N) - a(u_N, u_N) \\ &= -\frac{1}{2}a(u_N, u_N), \end{aligned}$$

de donde

$$J_1(u_N) - J_1(u) = -\frac{1}{2}a(u_N - u, u_N - u) \leq 0$$

para todo $u \in V_N$.

b) u_N es el elemento de V_N que está a mínima distancia de u ya que,

$$a(u - u_N, u - u_N) = \inf_{v \in V_N} a(u - v, u - v),$$

es decir, se tiene el lema de Cea (ver p.e., [39])

$$\|u - u_N\|_V = \inf_{v \in V_N} \|u - v\|_V.$$

c) Como ℓ es continua sobre V , existe $c > 0$ tal que, $|\ell(v)| \leq c\|v\|_V$ entonces

$$\|u_N\|_V^2 = a(u_N, u_N) = \ell(u_N) \leq c\|u_N\|_V$$

de donde, $\|u_N\|_V \leq c$ y por tanto $\{u_N\}$ es una sucesión acotada en V (todo acotado de un espacio de Hilbert es relativamente compacto) y se puede extraer una subsucesión, que denotamos de la misma manera, tal que, $u_N \rightharpoonup v^*$ en V débilmente, es decir, $a(u_N, v) \rightarrow a(v^*, v) = \ell(v)$ para todo $v \in V$ para $N \geq N_0$ fijo. Como V_N está densamente contenido en V y la solución es única, entonces, $v^* = u$ y en consecuencia,

$$J_1(u_N) - J_1(u) = \frac{1}{2}a(u_N - u, u_N - u) - \ell(u_N - u) \rightarrow 0$$

cuando $N \rightarrow \infty$. La convergencia de $\{u_N\}$ a u es fuerte, ya que

$$\begin{aligned} a(u_N - u, u_N - u) &= a(u_N, u_N) - a(u_N, u) - a(u, u_N - u) \\ &= \ell(u_N) - a(u_N, u) - \ell(u_N - u) \\ &= -a(u_N, u) + \ell(u) \rightarrow -a(u, u) + \ell(u) \\ &= -\ell(u) + \ell(u) = 0, \end{aligned}$$

y como,

$$a(u_N - u, u_N - u) = \|u_N - u\|_V^2$$

se tiene $\|u_N - u\|_V \rightarrow 0$.

Ilustremos el método con un problema de frontera para la ecuación de Helmholtz en \mathbb{R} .

Considere el problema de frontera

$$\begin{aligned} -\frac{d^2 u}{dx^2} + u &= f \quad \text{en } \Omega = (0, 1) \\ u(0) &= u(1) = 0, \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

donde $f \in L_2(0, 1)$. Sea $V = \{v \in H^1(0, 1) : v(0) = v(1) = 0\}$ un subespacio de $H^1(0, 1)$. La formulación débil del problema es

$$u \in V, \quad \underbrace{\int_0^1 (u'v' + uv)dx}_{a(u,v)} = \underbrace{\int_0^1 f v dx}_{\ell(v)}, \quad \forall v \in V. \quad (3.3.5)$$

Aplicando el Lema de Lax-Milgram, vemos que el problema (3.3.5) tiene solución única. Resolver este problema variacional es equivalente a encontrar la solución del problema (3.3.4).

Con este fin, se discretiza el problema (3.3.5). Consideremos la partición del intervalo $I = [0, 1]$ en N subintervalos $0 < x_0 < x_1 < \dots < x_N = 1$. Los puntos x_i , $0 \leq i \leq N$ se llaman los nodos y los subintervalos $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ son los elementos, para $0 \leq i \leq N$, $h_i = x_i - x_{i-1}$, y $h = \frac{1}{N}$ se llama tamaño de malla. Usemos las funciones lineales a tramos para la aproximación, es decir, escojamos

$$V_h = \{v_h \in V : v_h|_{I_i} \in \mathcal{P}_1(I_i), \ 1 \leq i \leq N\},$$

acá \mathcal{P}_1 el conjunto de todos los polinomios de grado menor o igual a 1. Para que una función suave a tramos v_h , $v_h \in H^1(I)$ si y sólo si $v_h \in C(\bar{I})$. Por tanto, una manera más precisa de definir el espacio de elementos finitos es,

$$V_h = \{v_h \in C(\bar{I}) : v_h|_{I_i} \in \mathcal{P}_1(I_i), \ 1 \leq i \leq N, \ v_h(0) = v_h(1) = 0\}.$$

Definamos las funciones base $\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$ de V_h como sigue:

$$\text{i) } \varphi_j(x_i) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

ii) $\varphi_j(x)$ es una función lineal continua a tramos, es decir,

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{j-1}}{h_j}, & x_{j-1} \leq x \leq x_j \\ \frac{x_{j+1} - x}{h_{j+1}}, & x_j \leq x \leq x_{j+1}. \end{cases}$$

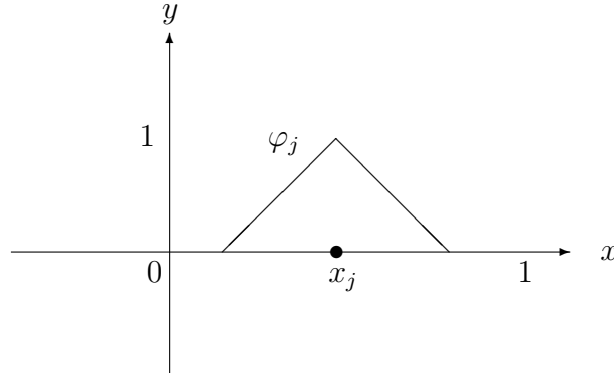


Figura 3.3.2

Puesto que $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ son funciones base, cualquier $v \in V_N$ se puede escribir como

$$v(x) = \sum_{i=1}^N v_i \varphi_i(x), \quad \text{con } v_i = v(x_i).$$

Es claro que $V_h \subset V$. El análogo discreto para (3.3.5) es:
Encontrar $u_h \in V_h$ tal que

$$\int_0^1 (u'_h v'_h + u_h v_h) dx = \int_0^1 f v_h dx, \quad \forall v_h \in V_h. \quad (3.3.6)$$

Nuevamente, este problema tiene solución única por Lema de Lax-Milgram. Ahora, si escogemos

$$u_h = \sum_{i=1}^N u_i \varphi_i(x),$$

Observe que (3.3.7) se tiene para toda función $\varphi_j(x)$, con $j = 1, \dots, N$ y obtenemos de esta manera el sistema de N ecuaciones

$$a\left(\sum_{i=1}^N u_i \varphi_i, \varphi_j\right) = \ell(\varphi_j), \quad j = 1, \dots, N.$$

Por la linealidad de a se tiene

$$\sum_{i=1}^N u_i a(\varphi_i, \varphi_j) = \ell(\varphi_j), \quad j = 1, \dots, N$$

que es equivalente al sistema lineal en las incógnitas u_1, \dots, u_N ,

$$\sum_{i=1}^N u_i \int_0^1 (\varphi_i' \varphi_j' + \varphi_i \varphi_j) dx = \int_0^1 f \varphi_j dx, \quad 1 \leq j \leq N. \quad (3.3.7)$$

En notación matricial se puede escribir como

$$K \mathbf{u} = \mathbf{b}, \quad (3.3.8)$$

donde $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_N)^T$, $\mathbf{b} = \left(\int_0^1 f \varphi_1 dx, \dots, \int_0^1 f \varphi_N dx \right)^T$ es el vector carga y $K = (a_{ij})$ es la matriz de rigidez dada por $a_{ij} = a_{ji} = a(\varphi_i, \varphi_j)$. Las entradas de la matriz K se calculan de manera directa. Primero note que $a_{ij} = a_{ji} = a(\varphi_i, \varphi_j) = 0$ para $|i - j| \geq 2$, ya que $\varphi_i(x)$ es de soporte compacto. En consecuencia,

$$\begin{aligned} a_{j,j} &= \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left[\frac{1}{h_j^2} + \frac{(x - x_{j-1})^2}{h_j^2} \right] dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left[\frac{1}{h_{j+1}^2} + \frac{(x_{j+1} - x)^2}{h_{j+1}^2} \right] dx \\ &= \left[\frac{1}{h_j} + \frac{1}{h_{j+1}} \right] + \frac{1}{3} [h_j + h_{j+1}] \\ a_{j,j-1} &= \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left[-\frac{1}{h_j^2} + \frac{(x_j - x)(x - x_{j-1})}{h_j} \right] dx \\ &= -\frac{1}{h_j} + \frac{h_j}{6}. \end{aligned}$$

Luego el sistema (3.3.8) se puede escribir como

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & 0 \\ b_1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_{N-1} \\ 0 & & b_{N-1} & a_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^1 f \varphi_1 dx \\ \int_0^1 f \varphi_2 dx \\ \vdots \\ \int_0^1 f \varphi_N dx \end{pmatrix},$$

donde $a_j = \frac{1}{h_j} + \frac{1}{h_{j+1}} + \frac{1}{3} [h_j + h_{j+1}]$ y $b_j = -\frac{1}{h_j} + \frac{h_j}{6}$. En el caso especial de una malla uniforme $h_j = h = \frac{1}{N+1}$, la matriz toma la forma

$$K = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 2 \end{pmatrix} + \frac{h}{6} \begin{pmatrix} 4 & 1 & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Bibliografía

- [1] Antipov, Y. A., and Fokas, A. S. The modified Helmholtz equations in a semi-strip. *Math. Proc. Cam. Phil. Soc.* 138 (2005), 339-365.
- [2] Atkinson, K., and Han, W. *Theoretical Numerical Analysis A Functional Analysis Framework*. Second Edition. Tex. Appl. Math. 39 Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York. 2005.
- [3] Bao, G., Wei, G. W., and Zhao, S. Numerical solution of the Helmholtz equation with high wavenumbers. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 59 (2004), 389-408.
- [4] Born, M. and Wolf, E. *Principles of Optics*. Cambridge University Press 7th ed, U. K, 1999.
- [5] Bender, C. M., and Orszag, S.A. *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers. Asymptotic Methods and Perturbation Theory*. Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York. 1999.
- [6] Cai, X. C., Casarin, M., Elliott, F. W., and Widlund, O. Overlapping Schwarz Algorithms for Solving Helmholtz's Equation. *Contemporary Mathematics*. Vol. 218 (1998), 391-399.
- [7] Chandler-Wilde, S. N., The impedance boundary value problem for the Helmholtz equation in a half-plane. *Math. Methods Appl. Sci.* 20 (1997), 813-840.
- [8] Chandler-Wilde, S. N., and Peplow, A. T. A boundary integral equation formulation for the Helmholtz equation in a locally perturbed half-plane. *J. of Appl. Math. and Mech.* Vol. 85 (2005), 79-88.

- [9] Colton, D., and Kress, R. *Integral Equations Methods in Scattering Theory*. John Wiley & Sons, Inc. New York,, 1983.
- [10] Colton, D., and Kress, R. *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*. Vol. 93 of Appl. Math. Sci. Springer-Verlag. New York, 1992.
- [11] DeMey, G. A simple integral equation method for the calculation of the eigenvalue of Helmholtz equation. *Int. J. Num. Meth.Eng.* 11 (1977), 1340-1342.
- [12] DeMey, G. Calculation of eigenvalue of the Helmholtz equation by integral equation. *Int. J. Num. Meth.Eng.* 11 (1976), 49-66.
- [13] Duffy, D. G. *Green's Functions with Applications*, Studies in Advanced Mathematics. Chapman and Hall/CRC Boca Raton, 2001.
- [14] Duffy, D. G. *Transform Methods for Solving Partial Differential Equations*, 2nd ed. Chapman and Hall/CRC Boca Raton, 2004.
- [15] Duran, M., Muga, J., and Nédelec, J. C. The Helmholtz equation in a locally perturbed half-plane with pasive boundary. *IMA. J. Appl. Math.* 71 (2006), 853-876.
- [16] Dutray, R., and J. L. Lions, J. L. *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology*. Springer-Verlag. Berlin-Heidelberg-New York. 1990.
- [17] Erlangga, Y. A., Vuik, C., and Oosterlee, C. W. On a class of preconditioners for solving the Helmholtz equations. *Appl. Num. Math.* 50 (2004), 409-425.
- [18] Erlangga, Y. A., Vuik, C., and Oosterlee, C. W. Comparison of Multigrid and incomplete LU Shifted-Laplace preconditioners for inhomogeneous Helmholtz equations. *Appl. Num. Math.* 56 (2006), 648-666.
- [19] Erlangga, Y. A., Oosterlee, C. W., and Vuik, C. A novel Multigrid based preconditioner for Heterogeneous Helmholtz problems. *SIAM. J. Sci. Comput.* Vol. 27, n. 4 (2006), 1471-1492.
- [20] Evans, L. C. *Partial Differential Equations*. Graduate Studies in Mathematics Vol. 19, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2002.

-
- [21] Folland, G. B. *Introduction to Partial Differential Equations*, Second Edition. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1995.
 - [22] Folland, G. B. *Real Analysis*, 2nd edition . John Wiley & Sons, Inc. New York, 1999.
 - [23] Gilbarg, D., and Trudinger, N. S. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag. Berlin-Heidelberg-New York. 1998.
 - [24] Goon, Ch. and Zhou, J. *Boundary Element Methods*. Academic Press, New York, 1992.
 - [25] Hörmander, L., *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I*. Springer-Verlag. Berlin-Heidelberg-New York. 1983.
 - [26] Ihlenburg, F., and Babuška, I. Finite element solution of the Helmholtz equation with high wave number Part I: The h version of the FEM. *Comput. Math. Appl.* 30 (1995), 9-37.
 - [27] Ihlenburg, F., and Babuška, I. Finite element solution of the Helmholtz equation with high wave number Part II: The h-p version of the FEM. *SIAM J. Numer Anal.* 34 (1997), 315-358.
 - [28] Kevorkian, J., and Cole, J.D. *Multiple Scale and Singular Perturbation Methods*. Appl. Math. Sci. 114 Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York. 1996.
 - [29] Kirkup, S. M., and Amini, S. Solution of the Helmholtz eigenvalue problem via the boundary element methods. *Int. J. Num. Eng.* 36 (1993), 321-330.
 - [30] Kirsch, A. Remarks on some notions of weak solutions for the Helmholtz equation. *Appl. Anal.*, 14 (1992), 7-24.
 - [31] Kreyszig, E. *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley & Sons. New York, 1978.
 - [32] Lebedev, N. N. *Special Functions & Their Applications*. Dover Publications, Inc. New York, 1972.
 - [33] McLean, W. *Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations*. Cambridge University Press, New Yor, 2000.

- [34] McOwen, R. C. *Partial Differential Equations, Methods and Applications*. Second Edition. Prentice-Hall, Inc. New Jersey, 2003.
- [35] Otto, K., and Larsson, E. Iterative solution of the Helmholtz equation by a second-order method. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* 21 (1999), 209-229.
- [36] Pinsky, M. A. *Introduction to Fourier Analysis and wavelet*, Brooks/Cole, NJ, 2001.
- [37] Pinsky, M. A. *Partial Differential Equations and Boundary Value Problems with Applications*. Third Edition, McGraw-Hill, New York, 1998.
- [38] Pipkin, A. C. *A curse on Integral Equations*. Tex. Appl. Math. 9 Springer-Verlag. New York, 1991.
- [39] Reddy, B. D. *Introductory Functional Analysis*. Tex. Appl. Math. 27 Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York. 1998.
- [40] Renardy, M., and Rogers, R. C. *An Introduction to Partial Differential Equations*. Tex. Appl. Math. 13 Springer-Verlag. New York, 2004.
- [41] Roach, G. F. *Green's functions*. Van Nostrand Reinhold Co, London 1970.
- [42] Rudin, W., *Functional Analysis*. McGraw-Hill Book Company. New York. 1973.
- [43] Rudin, W., *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill Book Company. New York. 1966.
- [44] Sommerfeld, A. Die Greensche Funktion der Schwingungsgleichung. *Jahresber. Deutsch. Math. Verein.*, 21 (1912), 309-353.
- [45] Stakgold, I. *Green's functions and boundary value problems*. John Wiley & Sons, New York 1979.
- [46] Tang, Y., and Oullet, Y. A perturbation boundary element method for combined refraction-diffraction of water waves with reflection. 497 - 504. in *Boundary Elements XVII*, C. A. Brebbia, S. Kim, T. A. Osswald, H. Power. (eds.), Computational Mechanics Publications. Boston 1995.
- [47] Trèves, F., *Linear Partial Differential Equations with Constant Coefficients*. Gordon and Breach, Science Publishers, Inc., New York. 1966.

-
- [48] Verchota, G. Layer potentials and boundary value problems for Laplace's equation in Lipschitz domains, *J. Funct. Anal.* 59 (1984), 572-611.
 - [49] Yura, H. T. Mutual coherence function of a finite cross section optical beam propagating in a turbulent medium, *Appl. Opt.* 11 (1972), 1399-1406.
 - [50] Zauderer, E. *Partial Differential Equations of Applied Mathematics*, Second Edition. John Wiley & Sons, Inc. New York 1998.